*Механика деформируемого твердого тела*
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1892–1893

УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ КОМПОЗИТОВ И ПОРИСТЫХ СРЕД СПЕЦИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

© 2011 г.
***Т.А. Якубенко***

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

yakubta@mail.ru

*Поступила в редакцию 15.06.2011*

Для вычисления эффективных модулей композитов и пористых сред периодической структуры в случае, когда отношение масштаба неоднородности к глобальному линейному масштабу процесса мало, известен алгоритм, основанный на введении быстрых и медленных переменных и представлении решений в виде асимптотических рядов по $\varepsilon$. Рассматриваются среды и процессы, в описании которых, кроме $\varepsilon$, присутствуют дополнительные малые параметры, а именно, материалы вытянутой структуры, материалы с порами или включениями в виде периодической системы параллелепипедов или каналов прямоугольного сечения при определенных условиях на отношение модулей включений и матрицы и величину объемной доли включений (пор). Рассматривается обобщение классического алгоритма на случай таких структур и проводятся серии вычислений. Исследована зависимость эффективных модулей от степени вытянутости структуры, геометрической формы включений, отношения модулей включений и матрицы, относительного объема включений (пор). Проведено также сравнение эффективных коэффициентов с величинами, полученными из выведенных ранее приближенных явных формул.

*Ключевые слова:* композиты, пористые среды, эффективные модули, малые параметры, вычисление.

## Постановка задачи

Для вычисления эффективных модулей композитов и пористых сред периодической структуры в случае, когда отношение $\varepsilon$ масштаба неоднородности $d$ к глобальному линейному масштабу процесса $L$ мало, можно использовать алгоритм математической теории осреднения, состоящий из следующих шагов [1]. Наряду с медленными переменными $x_i$ с характерным масштабом изменения $L$ вводятся быстрые переменные $y_i = x_i/d = x_i/L$ с характерным масштабом изменения $d$. Обычно используются безразмерные переменные и полагается $L = 1$. Решение $u$ задачи для исходных уравнений рассматривается как функция $x_i$, $y_i$, $t$. Далее $u$ представляется в виде асимптотического ряда $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$ Для периодической среды коэффициенты ряда предполагаются периодическими по $y_i$. Далее ряд подставляется в исходную систему уравнений и граничных условий. В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях $\varepsilon$ возникают так называемые задачи на ячейке для определения коэффициентов ряда; система замыкается осреднением по ячейке периодичности. Коэффициенты эффективных осредненных уравнений вычисляются через решения задач на ячейке. В частности, при вычислении эффективных модулей упругости для упругих сред периодической структуры задачи на ячейке могут быть сведены к шести статическим задачам об определении перемещений при растяжениях ячейки периодичности вдоль координатных осей и сдвигах вдоль координатных плоскостей в отсутствие массовых сил при специальных граничных условиях. При вычислении эффективных коэффициентов теплопроводности задачи на ячейке – это задачи об определении поля температуры внутри ячейки при заданных перепадах температуры вдоль координатных осей и дополнительных условиях периодичности на границах. В случае сложной структуры ячейки эти задачи могут быть решены только численно.

Если в описании среды или процесса присутствуют, кроме $\varepsilon$, дополнительные малые параметры, то приближенные решения задач на ячейке можно пытаться построить в явной форме. Тогда можно получить явные приближенные формулы для эффективных коэффициентов. В частности, такие формулы были получены для материалов вытянутой структуры (отношения $\gamma_i$ периодов в поперечном направлении к периоду в продольном направлении мало) [2–4], а также для материалов с порами или включениями в виде периодической системы параллелепипедов или каналов прямоугольного сечения, если малы параметры $\theta = Q_0 V_1/(Q_1 V_0)$, $\delta$, где $Q_0$, $Q_1$, $V_0$, $V_1$ – характерные значения упругих модулей и относительных объемов включений и матрицы, $\delta$ – типичная толщина прослоек между включениями [5]. Были получены также теоретические оценки погрешности этих формул, показывающие, что погрешность стремится к нулю при стремлении к нулю дополнительных малых параметров. Для практики, однако, важно знать порядок погрешности при малых, но конечных значениях этих параметров. Проведенные расчеты отвечают, в частности, на этот вопрос.

## Численное исследование эффективных модулей

Эффективные модули ряда различных пористых сред и композитных материалов рассчитывались с помощью найденных численно решений задач на ячейке. Численный метод нахождения решения задач на ячейке и некоторые результаты расчетов эффективных модулей для сред вытянутой структуры описаны в [4]. Этот метод является одной из модификаций метода конечных элементов. Здесь этот метод применен для решения задач на ячейке и расчета эффективных модулей не только для класса сред с вытянутой структурой, но и для композитов и пористых сред, для которых описанные выше дополнительные параметры не малы. Рассчитывались коэффициенты упругости и теплопроводности. Исследовались композиты с изотропными и анизотропными компонентами, с различной геометрической формой включений и различными отношениями типичных значений коэффициентов теплопроводности и упругости включений и матрицы. Результаты приведены в виде таблиц и графиков. В случаях, когда параметры $\gamma_i$ или $\theta$, $\delta$ малы, эффективные коэффициенты рассчитывались также по приближенным явным формулам. Сравнение с величинами, полученными с помощью решений задач на ячейке, позволяет оценить погрешность явных формул в зависимости от величины параметров $\gamma_i$, $\theta$, $\delta$ и других определяющих параметров задачи. Вычисления подтверждают, что при малых $\gamma_i$, $\theta$, $\delta$ погрешность явных формул мала.

В работе принимала участие М.Э. Эглит.

***Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-01-00625а.***

*Список литературы*

1. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
2. Yakubenko T.A. // Russian J. of Analysis and Mathematical Modeling. 1998. V. 13, No 2. P. 149–157.
3. Якубенко Т.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, №1. С. 89–100.
4. Якубенко Т.А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44, №9. С. 1638–1653.
5. Бахвалов Н.С., Эглит М.Э. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38, №5. С. 813–834.

## INVESTIGATION OF THE EFFECTIVE MODULES OF COMPOSITES AND POROUS MEDIA OF SPECIAL STRUCTURE

***T.A. Yakubenko***

To calculate the effective moduli of periodic composites and porous media for the case when the ratio of the inhomogeneity scale and the global length scale of the process is small, there is a well-known algorithm which is based on the method of two-scale asymptotic expansions. In this paper media and processes are considered which are characterized by additional small parameters, namely materials with a stretched structure as well as materials with pores or inclusions having shapes of parallelepipeds or rectangular channels at certain conditions on the values of matrix and inclusions moduli and volume concentration of inclusions. Generalization of the classic algorithm for such structures is proposed and calculations are performed. The dependencies of the values of the effective moduli on the degree of the structure stretching, geometrical shape of the inclusions, the ratio of the inclusion and the matrix moduli and on the inclusions (pores) volume concentration are studied. Comparison of the calculated effective coefficients values with the values obtained by explicit approximate formulae derived earlier is given.

*Keywords:* composites, porous media, effective modules, small parameters, calculation.