УДК 539.3

ВИБРАЦИОННЫЙ ИЗГИБ ВЯЗКОУПРУГОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ

А.А. Барышев

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

BaryshevAA@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследовано напряженно-деформированное состояние и тепловое поле тонкой изотропной кольцевой пластинки, изготовленной из вязкоупругого материала, свойства которого зависят от температуры. Рассматриваемая пластинка испытывает малые деформации под действием приложенного на внешнем контуре воздействия, меняющегося во времени по гармоническому закону. На основе классической модели Кирхгофа проведен численный анализ моделей, учитывающих поперечные сдвиги, а также в пространственной постановке при различных способах закрепления краев и условий теплообмена.

Ключевые слова: вязкоупругая кольцевая пластинка, напряженно-деформированное состояние, тепловое поле, теория Кирхгофа, уточненные теории.

Рассматривается изотропная тонкостенная кольцевая пластина, изготовленная из вязкоупругого материала, свойства которого зависят от температуры. Считается, что рассматриваемая пластинка испытывает малые деформации под действием распределенной по лицевой плоскости поперечной нагрузки:

$$q(r,t) = q_1(r)\cos\omega t + q_2(r)\sin\omega t, \qquad (1)$$

где t – время, ω – частота.

Принимая справедливым закон линейной вязкоупругости, соотношения между компонентами тензоров напряжений и деформаций для материала пластинки запишем в виде [1]:

$$\sigma_r = \frac{1}{1-\nu^2}\int_{-\infty}^{t} K(\Theta,\omega,\tau)(\varepsilon_r(\tau)+\nu\varepsilon_\varphi(\tau))d\tau,$$
$$\tau_{rz} = \frac{1}{2(1+\nu)}\int_{-\infty}^{t} K(\Theta,\omega,\tau)\gamma_{rz}(\tau)d\tau, \quad r \leftrightarrow \varphi. \qquad (2)$$

Здесь $\Theta = \Theta(r,z)$ – неизвестная безразмерная установившаяся температура саморазогрева, ν – коэффициент Пуассона, который предполагается постоянным.

Уравнения движения малого элемента пластинки в рассматриваемом случае будут следующими:

$$\frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\varphi}{r} = N,$$
$$\frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1}{r}N + q(r,t) = -\rho h\omega^2 u_z. \qquad (3)$$

Здесь ρ – плотность материала пластинки, u_z – нормальная компонента вектора перемещения, M_r, M_φ – изгибающие моменты, N – перерезывающая сила.

Для определения максимально возможной температуры саморазогрева при вычислении мощности источников тепла $Q(r, z)$, появляющихся вследствие диссипации энергии и распределенных по объему объекта, предполагается, что вся работа внешних сил переходит в тепло. Эта мощность за цикл колебаний определяется формулой [1]:

$$Q(r,z) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\left(\sigma_r\frac{\partial\varepsilon_r}{\partial t} + \sigma_\varphi\frac{\partial\varepsilon_\varphi}{\partial t} + \tau_{rz}\frac{\partial\gamma_{rz}}{\partial t}\right)dt.$$

Уравнение теплопроводности в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r} + \frac{1}{\lambda T_s}Q(r,z) = 0, \qquad (4)$$

где обозначено: $\Theta = (T - T_0)/T_s$, $T_s = T_0 - T_1$; T_0, T_1 – характерные температуры, λ – коэффициент теплопроводности материала, $T = T(r,z)$ – неизвестная установившаяся температура саморазогрева.

При нахождении температурного поля предполагается, что, в силу малости толщины пластинки, ее края теплоизолированы, а теплообмен с внешней средой происходит через лицевые плоскости.

Поле перемещений по классической модели Кирхгофа определяется формулами:

$$u_r(r,z,t) = -z\frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_z(r,z,t) = w(r,t), \qquad (5)$$

где $w(r, t)$ – прогиб точек срединной плоскости, $u_z(r,z,t)$ – тангенциальное смещение точек пластинки.

Полная система разрешающих уравнений

принимает вид:

$$\frac{dw_k}{dr} = -\theta_k, \quad \frac{d\theta_k}{dr} = -\frac{\nu}{r}\theta_k + $$
$$+(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{2} d_{k+j-1}(\Theta) M_r^{(j)},$$
$$\frac{dN_k}{dr} = -\frac{1}{r}N_k - \rho h\omega^2 w_k - q_k, \qquad (6)$$
$$\frac{dM_r^{(k)}}{dr} = -\frac{1-\nu}{r}M_r^{(k)} + \frac{1-\nu^2}{r^2}\times$$
$$\times\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1} D_{k+j-1}(\Theta)\theta_j + N_k,$$
$$D_k(\Theta) = \frac{1}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2} z^2 E_k(\Theta)dz.$$

Здесь $d_k = D_k/((D_1)^2 + (D_2)^2)$, $E_* = E_1 + iE_2 = \int_0^\infty K(\Theta,\omega,s)e^{i\omega s}ds$ – комплексный модуль.

Мощность источников тепла, входящая в уравнение (4), определяется формулой:

$$Q(r,z) =$$
$$= -\frac{\omega E_2(\Theta)}{2(1-\nu^2)}\sum_{k=1}^{2}(\{\varepsilon_r^{(k)}\}^2 + \{\varepsilon_\varphi^{(k)}\}^2 + 2\nu\varepsilon_r^{(k)}\varepsilon_\varphi^{(k)}).$$

Принимая поле перемещений в виде

$$u_r(r,z,t) = z\gamma(r,t), \quad u_z(r,z,t) = w(r,t), \qquad (7)$$

приходим к гипотезам Тимошенко [2], $\gamma(r,t)$ – неизвестная функция, характеризующая угол поворота. Отметим, что в этом случае система разрешающих уравнений совпадает с точностью до обозначений с системой (6), если положить $\theta_k = \gamma_k$ и в правой части первого уравнения добавить слагаемое

$$(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{2} b_{k+j-1}(\Theta)N_j,$$

где $b_k = B_k/((B_1)^2 + (B_2)^2)$,

$$B_k(\Theta) = \frac{1}{2(1+\nu)}\int_{-h/2}^{h/2} E_k(\Theta)dz.$$

Функция $Q(r,z)$ также изменится и примет вид:

$$Q(r,t) = -\frac{\omega E_2(\Theta)}{2(1-\nu^2)}\sum_{k=1}^{2}\left(\{\varepsilon_r^{(k)}\}^2 + \{\varepsilon_\varphi^{(k)}\}^2 + \right.$$
$$\left. + 2\nu\varepsilon_r^{(k)}\varepsilon_\varphi^{(k)} + \frac{1-\nu}{2}\{\gamma_{rz}^{(k)}\}^2\right).$$

Краевые задачи для модели, основанной на гипотезах Амбарцумяна, сформулированы в [3].

В случае непринятия каких-либо гипотез, получена система разрешающих уравнений в смешанной форме:

$$\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial z} = -\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial r} + 2(1+\nu)(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{2} e_{k+j-1}(\Theta)\tau_{rz}^{(j)},$$
$$e_k = E_k/((E_1)^2 + (E_2)^2),$$
$$\frac{\partial u_z^{(k)}}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial u_r^{(k)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(k)}}{r}\right) + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\times$$
$$\times(-1)^{k-1}\sum_{j=1}^{2} e_{k+j-1}(\Theta)\sigma_z^{(j)},$$
$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r} - \rho\omega^2 u_z,$$
$$\frac{\partial\tau_{rz}^{(k)}}{\partial z} = -\frac{1}{1-\nu^2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\left(E_{k+j-1}(\Theta)\frac{\partial^2 u_r^{(j)}}{\partial r^2} + \right.$$
$$+\left(\frac{E_{k+j-1}(\Theta)}{r} + \partial_r E_{k+j-1}(\Theta)\right)\frac{\partial u_r^{(j)}}{\partial r} +$$
$$\left. + \frac{1}{r}\left(-\frac{E_{k+j-1}(\Theta)}{r} + \nu\partial_r E_{k+j-1}(\Theta)\right)u_r^{(j)}\right) -$$
$$-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial\sigma_z^{(k)}}{\partial r}. \qquad (8)$$

Здесь $u_z(r,z,t)$ – нормальная проекция вектора смещений.

Краевые задачи для записанных систем дифференциальных уравнений решены на основе эффективных численных методик [4]. Получены результаты в рамках пространственной модели (отказ от гипотез). Проведен сравнительный анализ влияния на напряженно-деформированное состояние и тепловое поле пластинки учета зависимости свойств материала от температуры и поперечных сдвигов при различных способах закрепления контура и условиях теплообмена.

Список литературы

1. Недорезов П.Ф. // Сб. докл. XIX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. Н. Новгород, 28–30 сентября 1999г. Н.Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1999. С. 145–149.
2. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1946.
3. Барышев А.А. // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: Сб. трудов Междунар. конф. Воронеж, 2010. С. 49–52.
4. Барышев А.А., Брюшко М.И., Мыльцина О.А. // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 8. С. 171–174.

THE VIBRATIONAL BENDING OF A VISCOELASTIC ANNULAR PLATE

A.A. Baryshev

Steady-state oscillations of thin-walled annular viscoelastic plate under harmonically time-varying pressure distributed over bottom plane are considered. The mechanical properties of materials depend on the temperature. The comparison of numerical results with the rigorous, classic theory based on Kirchhoff hypothesis and specified theories is carried out.

Keywords: viscoelastic annular plate, stress-strain state, temperature field, classic theory of Kirchhoff hypothesis, specified theories.