УДК 539.3

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ЧИСТОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ СИММЕТРИЧНОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОДОЛЬНОЙ ОСИ СЕЧЕНИЯ ИЗ МАТЕРИАЛА С ПАДАЮЩЕЙ ДИАГРАММОЙ

Е.А. Бахарева

Уральский госуниверситет им. А.М. Горького, Екатеринбург

bahareva.e.a@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложен численный метод расчета положений равновесия балки произвольного поперечного сечения, выполненной из упругопластического материала, обладающего эффектом деформационного разупрочнения. Исследована сходимость итерационного процесса. Проведены расчеты для балок с различными сечениями.

Ключевые слова: чистый изгиб, упрочнение, разупрочнение, итерационная процедура, сходимость.

Рассматриваем балку высотой $2h$ и длиной L, поперечное сечение которой ограничивает контур $\Gamma(y)$, симметричный относительно продольной оси. К балке прикладываем постепенно возрастающий изгибающий момент M (рис. 1). Свойства материала определяет полная диаграмма деформирования $\sigma(\varepsilon)$, характеризующаяся функцией касательного модуля $E^p = d\sigma/d\varepsilon$. На восходящем участке диаграммы значение касательного модуля больше нуля (упрочнение материала), на падающем – меньше нуля (разупрочнение). Свойства материала при сжатии и растяжении одинаковы. Поэтому диаграмма симметрична относительно начала координат.

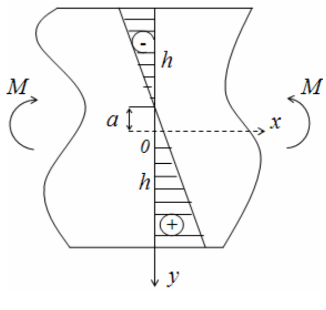

Рис. 1

Полагаем, что полная деформация разбивается на сумму $\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e$, где ε^e и ε^p – упругая и пластическая ее составляющие.

Разгрузка происходит по модулю Юнга E. Уравнения равновесия и условия совместности деформаций удовлетворяются тождественно. Граничные условия, а именно равенства нулю главного вектора и главного момента, находим, интегрируя напряжения по всему поперечному сечению F. Имеем

$$\iint\limits_{(F)} \sigma(y+a)dF = 0, \quad \iint\limits_{(F)} \sigma(y+a)ydF = M.$$

Преобразуем эти соотношения по теореме о криволинейной трапеции в силу симметричности граничного контура $\Gamma(y)$ относительно продольной оси. После преобразований получаем уравнения

$$2\int_{-h}^{h} \sigma(\kappa(y+a))\Gamma(y)dy = 0,$$

$$2\int_{-h}^{h} \sigma(\kappa(y+a))\Gamma(y)ydy - M = 0 \quad (\varepsilon = \kappa(y+a)). \tag{1}$$

Второе соотношение представим в виде разности

$$M = 2\int_{-h}^{h} E(\varepsilon - \varepsilon^p)\Gamma(y)ydy = \kappa I - M^{\Phi},$$

где

$$I = 2E\int_{-h}^{h} \Gamma(y)(y+a)ydy$$

– жесткость при изгибе упругой балки,

$$M^{\Phi} = 2E\int_{-h}^{h} \varepsilon^p \Gamma(y)y\,dy$$

– фиктивный изгибающий момент. Переменной a здесь обозначено расстояние от нейтральной оси, где нулевые напряжения и деформации, до средней линии. Эта величина из соотношения (1) и закона Гука $\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p)$ может быть представлена в виде

$$a = \frac{R^{\Phi}\int_{-h}^{h}\Gamma(y)ydy - M^{\Phi}\int_{-h}^{h}\Gamma(y)y^2dy}{M^{\Phi}\int_{-h}^{h}\Gamma(y)ydy - R^{\Phi}\int_{-h}^{h}\Gamma(y)dy}. \tag{2}$$

Здесь

$$R^{\Phi} = 2E\int_{-h}^{h} \varepsilon^p(\kappa(y+a))\Gamma(y)dy$$

– фиктивное растягивающее усилие. Исходя из разбиения изгибающего момента, решение исходной задачи составляется из суммы решений основной и корректирующей задач. Основная задача является задачей об изгибе упругой балки с модулями E под действием изгибающего момента M. Ее решение имеет вид

$$\kappa' = M/I, \quad \varepsilon' = \kappa'(y+a), \quad \sigma' = E\varepsilon'. \qquad (3)$$

Корректирующая задача – это задача о нахождении остаточных напряжений, возникающих в балке из-за появления в ней пластических деформаций; при этом балка свободна от внешних усилий. В этом случае напряженно-деформированное состояние определяют равенства

$$\kappa'' = M^{\Phi}/I, \quad e' = \kappa''(y+a), \quad \sigma'' = E(e' - \varepsilon^p), \qquad (4)$$

где пластические деформации определяет закон пластичности [1]:

$$\varepsilon^p(y) = \int_0^{\varepsilon}(1 - E^p/E)d\varepsilon.$$

Итерационный процесс

Пусть на некотором этапе нагружения при моменте M_0 балка находится в равновесии. При этом известны кривизна κ_0, расстояние a_0 и функции ε_0, σ_0, $\varepsilon^p(\varepsilon_0)$. Возмутим положение равновесия, увеличив изгибающий момент на малую величину ΔM. Тогда параметры возмущения σ'_Δ, e'_Δ, κ'_Δ, a'_Δ находим из решения основной задачи (3) и формулы (2), где вместо M используем ΔM и a заменяем на a_0. Тогда параметры балки в возмущенном состоянии ($M = M_0 + \Delta M$) равны

$$\sigma_1(y) = \sigma_0(y) + \sigma'_\Delta(y), \quad \varepsilon_1(y) = \varepsilon_0(y) + e'_\Delta(y),$$

$$\kappa_1 = \kappa_0 + \kappa'_\Delta = M/I_0, \quad a_1 = a_0 + a'_\Delta.$$

Данные величины соответствуют равновесию при неизменившихся ε_0^p. Отсюда σ_1 и ε_1 уже не удовлетворяют диаграмме деформирования $\sigma(\varepsilon)$. Следовательно, параметры балки должны поменяться и отвечать ε_1. Поэтому касательные модули станут равными $E^p = E^p(\varepsilon_1)$ и пластические деформации достигнут ε_1^p. Найденное равновесие нарушается, и балка под действием момента M должна перейти в другое равновесное состояние с параметрами, равными сумме решений основной и корректирующей задач. Подставляя в формулы (2)–(4) новые величины $I_1 = I(\kappa_1, a_1)$ и $M_1^{\Phi} = M^{\Phi}(\kappa_1, a_1)$, находим κ'_1, ε'_1, σ'_1, a'_1 и κ''_1, ε''_1, σ''_1, a''_1. Тогда скорректированное напряженно-деформированное состояние определяется выражениями $\sigma_2 = \sigma'_1 + \sigma''_1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon'_1 + e'_1$, $\kappa_2 = \kappa'_1 + \kappa''_1$, $a_2 = a'_1 + a''_1$. Если снова σ_2 и ε_2 не удовлетворяют диаграмме деформирования $\sigma(\varepsilon)$, то их считаем первым приближением к решению задачи и проводим следующую корректировку, пересчитывая функции ε_2^p и E_2^p. Корректировки продолжаем до тех пор, пока параметры равновесия балки не будут удовлетворять диаграмме деформирования. Ранее установлено [2], что алгоритм сходится не всегда. В результате итераций получаем числовой ряд $\kappa = \kappa_0 + \kappa'_1 + \kappa''_1 + \kappa'_2 + \kappa''_2 + ...$, который начинает расходиться при условии

$$2\int_{-h}^{h} E^p\big(\kappa(y+a)\big)\Gamma(y)(y+a)yh\,dy = 0,$$

которое совместно с уравнениями (1) позволяет определить предельную несущую способность балки.

По предложенной методике проведены расчеты положений равновесия балок прямоугольного, треугольного, трапециевидного и двутаврового сечений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-08-96018).

Список литературы

1. Стружанов В.В., Миронов В.И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. 190 с.

2. Стружанов В.В., Бахарева Е.А. Итерационные процедуры расчета параметров равновесия и устойчивость процесса чистого изгиба балок из пластичных и хрупких разупрочняющихся материалов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. 2010. №1(20). С. 84–95.

AN ITERATIVE METHOD OF ESTIMATION OF EQUILIBRIUM PARAMETERS FOR PURE BENDING OF BEAMS OF SYMMETRICAL CROSS-SECTION RELATIVE TO THE LONGITUDINAL AXIS OF MATERIAL IN POSSESSION OF DESCENDING BRANCH

E.A. Bakhareva

The article is concerned with an iterative method of estimating the equilibrium parameters of beam with arbitrary cross-sections which made of elastoplastic material. The beam exhibits the strain weakening effect. The convergence of the iterative method is studied; calculations are performed for beams of various cross-sections.

Keywords: pure bending, hardening, weakening, iterative procedure, convergence.