УДК 534

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ УПРУГИХ ВОЛН

А.К. Беляев

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

vice.ipme@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предлагается описание, учитывающее неоднородность среды и недостаточность статистической информации о параметрах среды в рамках единого подхода. Подход основан на идее распространения стохастических волн в средах со случайными механическими параметрами Для теоретического анализа распространения одномерной волны используются метод спектрального разложения по волновым числам и теория непрерывных марковских цепей в форме уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова. Решен ряд граничных задач. Проведено численное моделирование процесса распространения волны. Результаты численной имитации подтверждают теоретический анализ, в частности демонстрируют экспоненциальное снижение достоверной информации об амплитуде распространяющейся волны, несмотря на полное отсутствие поглощения энергии в среде.

Ключевые слова: стохастические упругие волны, случайный модуль упругости, случайная массовая плотность.

Распространение сейсмических волн на большие расстояния характеризуется тем, что волна распространяется в среде с неоднородными геофизическими параметрами. Анализ осложняется тем, что информация о механических свойствах среды, входящих в качестве параметров в динамические уравнения, определяющие соотношения и граничные условия, известна лишь с некоторой степенью достоверности. Несмотря на принципиально различную природу этих эффектов предлагается описание, учитывающее неоднородность среды и недостаточность статистической информации о параметрах среды в рамках одного и того же подхода. Этот единый подход использует идею распространения стохастических волн в средах со случайными механическими параметрами (плотность и упругий модуль среды). Для каждого из вышеперечисленных случайных параметров достаточно предложить корреляционную функцию, содержащую три параметра (среднее значение, радиус корреляции и интенсивность корреляции), и тогда задача распространения стохастических волн будет иметь минимальное количество параметров и, тем не менее, окажется приспособленной для описания широкого класса волновых процессов.

Распространение одномерной гармонической волны частоты ω в полубесконечном стержне $x \geq 0$ описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dx}\left(E\frac{dU}{dx}\right) + \rho\omega^2 U = 0, \qquad (1)$$

где U – амплитуда волны, а модуль Юнга E и плотность ρ предполагаются стационарными случайными функциями пространственной координаты x.

Для решения предлагаются метод спектрального разложения по волновым числам и теория непрерывных марковских цепей в форме уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова. В рамках первого подхода параметры среды представляются в форме интеграла Фурье–Стилтьеса со случайными Фурье-спектрами, а амплитуда волны допускает аналогичное спектральное представление с детерминированной амплитудно-частотной модуляцией однородного стохастического процесса. Анализ ограничен корреляционной теорией, доставляющей среднее поле и матрицу спектральных плотностей. Второй подход опирается на то, что функция вероятности перехода состояния стохастической волны управляется линейным дифференциальным уравнением в частных производных (уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова). Проведено исследование распространения волн в средах, чьи параметры могут рассматриваться как пространственный белый шум. Для реалистического моделирования упругих и массовых параметров среды была произведена предварительная фильтрация пространственного белого шума.

Показано, что экспоненциально коррелированные механические параметры приводят к физически осмысленным результатам.

Для проверки теоретических результатов произведено численное моделирование процесса распространения волны, координаты которой $U(x)$ определяются уравнением

$$\frac{d^2u}{dx^2}(1+m(x))+\left(\frac{dm}{dx}+2\alpha\right)\frac{du}{dx}+ \\ +(1+c(x))u=0, \quad (2)$$

где $m(x)$ – случайное отклонение безразмерной плотности среды, $c(x)$ – случайное отклонение безразмерной упругости среды, α – безразмерный коэффициент затухания. Предполагается, что случайные функции $m(x)$ и $c(x)$ – стационарные гауссовы процессы с нулевыми математическими ожиданиями и соответствующими дисперсиями D_m и D_c.

Случайные функции $m(x)$ и $c(x)$ в (2) моделируются на базе дискретных датчиков нормально распределенных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией с последующим масштабированием и фильтрацией при помощи инерционного звена первого порядка. Последнее эквивалентно решению совместно с (2) следующих дифференциальных уравнений:

$$T_m\frac{dm}{dx}+m=\sqrt{\frac{D_m}{h}}\xi_i, \quad T_c\frac{dc}{dx}+c=\sqrt{\frac{D_c}{h}}\eta_i, \quad (3)$$

где T_m, T_c – постоянные «времени» фильтров; ξ_i, η_i – выходы дискретных датчиков нормального белого шума, h – шаг интегрирования. С точки зрения теории случайных процессов уравнения (3) описывают экспоненциально коррелированные случайные процессы.

Совместное многократное численное решение дифференциальных уравнений (2), (3) для различных реализаций случайного распределения параметров среды при одних и тех же начальных условиях $u(0)=0, u'(0)=1$ проводилось методом Рунге–Кутта 4-го порядка. Число реализаций варьировалось и достигало десятков тысяч. Параметры среды изменялись в десятки раз. После получения множества реализаций для данного набора параметров среды определялись усредненные характеристики волны.

На рис. 1, 2 представлены результаты численного моделирования для двух характерных различных наборов параметров случайной среды (соответственно $D_m = D_c = 1$, $T_m = T_c = 5$ и $D_m = D_c = 0.2$, $T_m = T_c = 1$). Шаг интегрирования в обоих случаях $h = 0.01$. На рисунках отображены математические ожидания квадрата амплитуды волны, т.е. $<U^2>$, как функции координаты x.

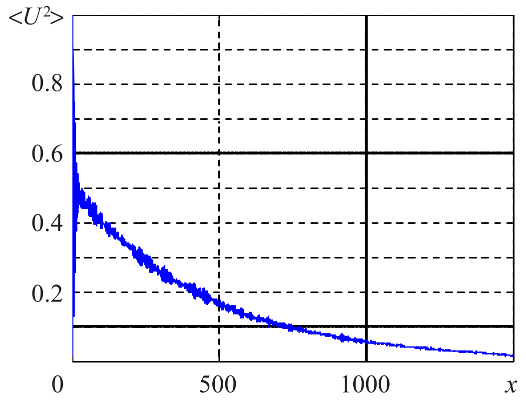

Рис. 1

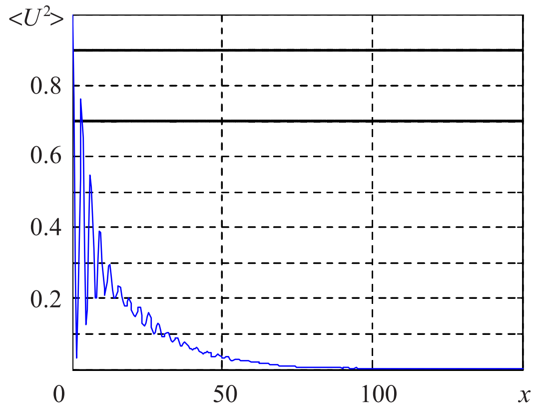

Рис. 2

Представленные графики наглядно демонстрируют наличие экспоненциального снижения достоверной информации об амплитуде распространяющейся волны, несмотря на полное отсутствие поглощения энергии в среде (в численных экспериментах безразмерный коэффициент затухания α принимался равным 0). Теоретические результаты подтверждаются как количественно, так и качественно.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-92002-ННС_а) и Научной программы Президиума РАН №22.

Список литературы

1. Belyaev A.K., Langley R.S. Benchmark study of three approaches to stochastic waves in elastic solids // Vibration Analysis of Structures with Uncertainties. Heidelberg: Springer, 2010. P. 217–231.

ANALYTICAL STUDY AND SIMULATION OF THE PROPAGATION OF STOCHASTIC ELASTIC WAVES

A.K. Belyaev

A description is presented that accounts for the medium heterogeneity and lack of statistical information about the medium parameters in the framework of a single approach. The approach is based upon the idea of propagation of stochastic waves in media with random mechanical parameters. For theoretical modeling of propagation of 1D waves we utilizes the method of spectral decomposition in terms of the wave numbers and the theory of continuous Markov chains in the form of the Fokker–Planck–Kolmogorov equation. A series of boundary-value problems are solved and simulation is carried out. The simulation results confirm the theoretical analysis; in particular, they confirm the exponential decay of the authentic information on the amplitude of the propagating wave despite the absence of the energy absorption in the medium.

Keywords: stochastic elastic waves, random elasticity modulus, random mass density.