УДК 531-539.3

РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ КОМПЛЕКСНЫХ C^2-ПОТЕНЦИАЛОВ. ПРИЛОЖЕНИЯ К МЕХАНИКЕ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Ф.А. Богашов, С.И. Хомутецкая, Л.О. Шарова

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

sharovaluyda@list.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

В качестве примера применения теории $\mathbf{C}^2$-потенциалов к решению задач механики деформируемого твердого тела получено решение пространственной задачи Дирихле для шара. Сформированы принципы $\mathbf{C}^2$-потенциалов.

Ключевые слова: комплексные матрицы $\mathbf{C}^2$, условия аналитичности, решение гармонических уравнений в $\mathbf{C}^2$, приложение к трехмерным задачам механики деформируемого твердого тела.

Наиболее эффективными из всех известных методов решения двухмерных задач математической физики, в частности температурных, являются методы, основанные на теории аналитических функций одной комплексной переменной $\mathbf{C}^1$-потенциалов. Для решения трехмерных задач до последнего времени такого аналога не существовало, так как не было самой основы – адекватной теории комплексных $\mathbf{C}^2$-потенциалов [1–5].

1. Базис пространств $\mathbf{R}^{3,4}$ и $\mathbf{C}^2$. Изоморфизм Гамильтона–Кэли

Для размерностей $n \geq 3$ показано [3], что закон построения базисных элементов оказывается недостаточным (неполнота представления).

Базис пространства $\mathbf{R}^4$ по Гамильтону может быть представлен элементами [3]

$$\{e, j, k, l\}, \tag{1}$$

изоморфными по Кэли комплексным матрицам Паули–Дирака [4]:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Представление переменной Гамильтона в базисах (1), (2)

В базисах (1), (2) переменная Гамильтона записывается соответственно

$$\kappa = x_1 e + x_2 j + x_3 k + x_4 l, \tag{3}$$

$$\kappa = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 \\ -x_3 + ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где x_m, $m = \overline{1,4}$, – текущие декартовы координаты точки пространств $\mathbf{R}^4$ и $\mathbf{C}^2$.

3. Условие аналитичности комплексных матричных $\mathbf{C}^2$-функций в $D \in \mathbf{C}^2$

Обобщенная на пространство $\mathbf{C}^2$ теорема Коши [6–9]

$$\int_\Gamma \varphi(\kappa, \overline{\kappa}) d\kappa = 0,$$

определяющая критерий аналитичности функций $\varphi(\kappa, \overline{\kappa})$ в области $D \cup \Gamma$, приводит к записи условий аналитичности

в пространстве $\mathbf{R}^{3,4}$ *в пространстве* $\mathbf{C}^2$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_4} = 0 \\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_4} = 0, \\
&\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} = 0, \\
&\frac{\partial\varphi_4}{\partial x_1} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4} = 0,
\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\kappa}} = 0. \tag{5}$$

4. Однородные аналитические полиномы в области $D \in \mathbf{C}^2$ [5, 8]

В комплексном пространстве $\mathbf{C}^2$ $\partial\varphi/\partial\overline{\kappa} \neq 0$, поскольку согласно (5) $\partial\kappa/\partial\overline{\kappa} \neq 0$, $\partial\overline{\kappa}/\partial\kappa \neq 0$.

Теперь роль простейших аналитических $\mathbf{C}^2$-функций играют однородные аналитические полиномы степени n:

$$P_n(\kappa,\overline{\kappa})=\sum_{p=0}^{n}a_p\kappa^{n-p}\overline{\kappa}^p,\quad a_p=\operatorname{Re}a_p. \qquad (6)$$

В [8, 9] приведено построение однородных аналитических полиномов произвольной степени n:

$$P_0(\bullet)=\kappa_0,\quad P_1(\bullet)=3\kappa+\overline{\kappa},$$
$$P_2(\bullet)=5\kappa^2+2\kappa\overline{\kappa}+\overline{\kappa}^2. \qquad (7)$$

5. Приложение теории C²-потенциалов к решению температурной задачи Дирихле для шара *D* единичного радиуса

Воспользуемся изложенными в пп. 1–4 результатами. Пусть κ и t – комплексные радиусы-векторы (4) любой точки внутри шара и его поверхности (контура Г). Требуется решить задачу Дирихле:

$$\begin{cases}\Delta T(\kappa,\overline{\kappa})=0, & T\big|_{r}=T(t,\bar{t})=f(t,f),\\ |\kappa|<1,\quad \kappa\in D, & |t|=1,\quad t\in\Gamma,\end{cases} \qquad (8)$$

где $f(t,\bar{t})$ – заданная на поверхности (пространственном контуре) функция.

Общим решением трехмерного гармонического уравнения (8) в комплексном пространстве $\mathbf{C}^2$ является

$$T(\kappa,\overline{\kappa})=\varphi(\kappa,\overline{\kappa})+\overline{\varphi(\kappa,\overline{\kappa})}=2\operatorname{Re}\varphi(\kappa,\overline{\kappa}), \quad (9)$$

где $\varphi(\kappa,\overline{\kappa})$ – произвольная аналитическая функция ($\mathbf{C}^2$-потенциал), что обобщает двумерный аналог формулы Гаусса для пространства $\mathbf{C}^1$. Зададим температурный режим на поверхности шара D $T\big|_{\Gamma}=f(t,\bar{t})$. Пусть

$$f(t,\bar{t})=1+t_1+2t_2^2,\quad \Gamma: t_1^2+t_2^2=1,\quad t_3=0, \quad (10)$$

то есть с поверхностного температурного шва Г идет прогревание тела шара D.

Выведем общее решение (9) на поверхность шара $|t|=1$. Тогда задача Дирихле (10) редуцируется в граничную задачу теории $\mathbf{C}^2$-функций

$$2\operatorname{Re}\varphi(t,\bar{t})=f(t,\bar{t}), \qquad (11)$$

которая с учетом (9)–(11) имеет алгебраический характер.

Приходим к окончательному решению задачи (8) в конкретном виде:

$$T(x_1,x_2,x_3)=\frac{7}{3}+x_1+\frac{2}{3}(x_2^2+x_3^2-2x_1^2).$$

Список литературы

1. Владимиров В.С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. С. 412.
2. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. С. 395.
3. Гамильтон У.Р. Избранные труды. М.: Наука, 1994. С. 560.
4. Арфкен Г. Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. С. 712.
5. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. 3-е изд. М.: Наука, 1984.
6. Богашов Ф.А. О представлении пространственных задач теории упругости в функциях комплексных переменных. Сообщение 1 // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. Межвуз. сб. / Горьк. ун-т. 1989. Вып. 41. С. 110–118.
7. Богашов Ф.А. Описание пространственных задач теории упругости с помощью аналитических функций переменной Гамильтона. Сообщение 2 // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. Межвуз. сб. / Горьк. ун-т. 1990. Вып. 44. С. 46–55.
8. Богашов Ф.А. Структура пространственных аналитический функций и формирование обобщенных функций Эри // Прикладн. проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 1991. Вып. 47. С. 15–26.
9. Богашов Ф.А., Угодчиков А.Г. Развитие методологии Мусхелишвили применительно к решению пространственных задач теории упругости. Ч. I // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций: Научн. тр. Н.Новгород, 1993. Вып. 1. С. 11–24.

THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF MATRIX COMPLEX C2-POTENTIALS. APPLICATIONS TO MECHANICS OF DEFORMABLE SOLIDS

F.A. Bogashov, S.I. Homutetskaya, L.O. Sharova

As an example of the application of theory of $\mathbf{C}^2$-potentials to the solution of problems of mechanics of deformable solids, a solution of a spatial Dirichlet problem for a sphere is obtained. The principles of $\mathbf{C}^2$-potentials are formulated.

Keywords: complex matrixes $\mathbf{C}^2$, conditions of analyticity, the decision of the harmonious equations in $\mathbf{C}^2$, appendix to three-dimensional problems of mechanics of a deformable firm body.