УДК 531.3

ДИНАМИКА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ С УПРУГИМ ТЕЛОМ

Д.С. Вавилов, В.Н. Наумов

Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

londr@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется динамика взаимодействия включения с основной средой. Рассматриваются различные условия контакта и их влияние на поведение включения и на распространение волны в среде.

Ключевые слова: динамика, включение, немонотонная определяющая характеристика, распространение волны, структурные изменения.

Линейный осциллятор

Простейшей моделью, описывающей процесс взаимодействия включения с основной средой, может служить линейный осциллятор на упругом волноводе. Рассмотрим полубесконечный одномерный стержень с присоединенной на торце массой (массовое включение). Система уравнений, описывающая динамику сосредоточенной массы и продольные колебания стержня, имеет вид

$$\begin{gathered} Eu_{xx} = \rho u_{tt}, \\ m\ddot{y} = c(u(0,t) - y(t)), \\ Eu_x = c(u(0,t) - y(t)). \end{gathered} \tag{1}$$

Для вывода механической системы из положения равновесия будем полагать начальную скорость массы отличной от нуля. В представленной постановке задача допускает построение аналитического решения [1], на основе которого может быть получено представление как о поведении осциллятора, так и о распространении волны в стержне. Характер движения сосредоточенной массы и распределение перемещений в стержне в фиксированные моменты времени продемонстрированы на рис. 1 и 2 соответственно.

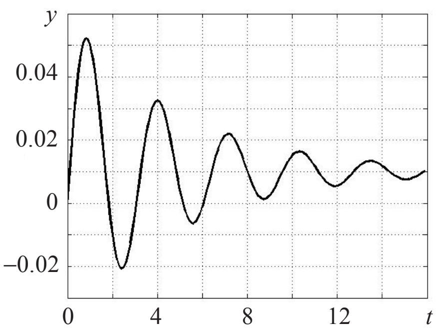

Рис. 1

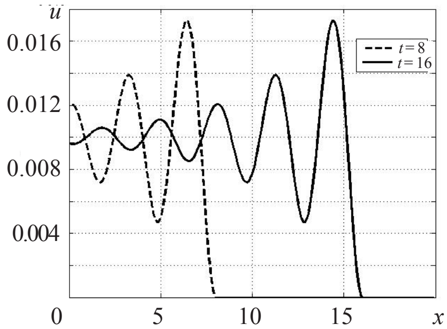

Рис. 2

На рис. 2 показан процесс проникновения волнового импульса вглубь материала. Отметим, что наличие массового включения оказывает заметное влияние на форму импульса и существенно усложняет его по сравнению с задачей о механическом воздействии на торец стержня без линейного осциллятора.

Сосредоточенная масса совершает затухающие колебания (см. рис. 1), так как с течением времени происходит отток кинетической энергии от массы к волноводу. Можно показать, что этот процесс происходит тем медленнее, чем меньше жесткость пружины.

Сосредоточенная масса на нелинейном элементе

Ясно, что условие контакта включения с основной средой может быть самым разнообразным. Если в предыдущем примере устремить жесткость пружины к бесконечности, то получится задача о стержне с жесткой вставкой на торце. Условие контакта может иметь и более сложный характер. Представим себе, что связь между осциллятором и волноводом осуществляется через нелинейный элемент, в котором зависимость между усилием и перемещением содержит ниспадающий участок и, следовательно, не является монотонной функцией. Подобная характеристика с невыпуклой потенциальной энергией деформации лежит в основе описания механически неустойчивых материалов, в которых могут происходить структурные преобразования, и поэтому она довольно часто встречается в литературе [2].

В качестве наглядной механической модели, отражающей подобную зависимость, удобно использовать структурный элемент, известный под названием фермы Мизеса [3]. Определяющая диаграмма данного элемента имеет аналитическое выражение, используя которое можно построить график зависимости усилия F от перемещения u:

$$F(u) = 2E_0\left(1 - \frac{u}{a}\mathrm{tg}\alpha\right)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + (1 - u/a\mathrm{tg}\alpha)^2}} - \cos\alpha\right] + E_1 u. \quad (2)$$

В зависимости от значений параметров график может быть представлен немонотонной кривой одного из двух видов (рис. 3). Главное отличие этих кривых заключается в наличии у зависимости 2 еще одного устойчивого положения равновесия. Рассмотрим механическую систему, состоящую из сосредоточенной массы, соединенной с жестким основанием с помощью вышеупомянутого элемента, и демпфирующего механизма, трение в котором пропорционально скорости. После прохождения динамического процесса масса в системе, отвечающей зависимости 2, может перейти в новое положение равновесия. Это наглядно видно на рис. 4, на котором представлен результат численного интегрирования уравнения, описывающего динамику данной механической модели.

Теперь сформулируем задачу о взаимодействии массы, соединенной с полубесконечным одномерным упругим телом при помощи структурного элемента с немонотонной определяющей диаграммой. Уравнение продольных колебаний стержня сохраняется без изменений, а в уравнении движения массы и в условии сопряжения стержня с пружиной требуется заменить упругий соединительный элемент на нелинейный. В результате система уравнений приобретает следующий вид:

$$\begin{gathered} Eu_{xx} = \rho u_{tt}, \\ m\ddot{y} = F(u(0,t) - y(t)), \\ Eu_x = F(u(0,t) - y(t)). \end{gathered} \quad (3)$$

Решение данной задачи проводится численно. Для ее анализа применяется метод конечных разностей, суть которого состоит в замене частных производных их разностными аппроксимациями. На основе полученного решения производится сравнение формы импульса и динамики включения в линейном и нелинейном случаях.

Список литературы

1. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2007. 58 с.

2. Индейцев Д.А., Наумов В.Н., Семёнов Б.Н. // Изв. РАН. МТТ. 2007. №5. С.17–39.

3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем (Современные концепции, парадоксы и ошибки). М.: URSS, 2007. 44 с.

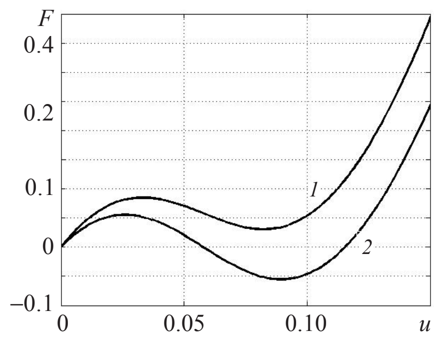

Рис. 3

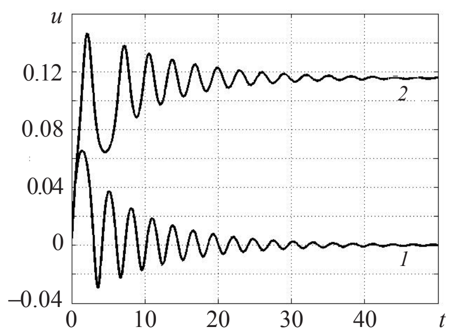

Рис. 4

DYNAMICS OF THE INTERACTION OF AN INCLUSION WITH AN ELASTIC MEDIUM

D.S. Vavilov, V.N. Naumov

The dynamics of interaction of an inclusion with an elastic medium is investigated. We consider various conditions of contact and examine their influence on the behavior of inclusion and wave propagation.droplets and ice crystals is given.

Keywords: dynamics, inclusion, non-monotone constitutive curve, wave propagation, structural transformations.