УДК 539.384

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА ПОД ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ: НЕКЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

В.И. Ванько

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

vvanko@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

На основе кинематической модели, использованной в работах автора (совместно с С.А. Шестериковым), поставлена и методом коллокации по срединному поперечному сечению решена задача о больших перемещениях точек срединной поверхности оболочки конечной длины, подверженной действию внешнего гидростатического давления. При условии, что устойчивое развитие квазистатического процесса заканчивается при малых (относительно среднего значения радиуса недеформированного поперечного сечения) прогибах, получены замкнутые выражения для критического времени (в условиях ползучести) и критического давления (нелинейная упругость).

Ключевые слова: цилиндрическая бесконечно длинная оболочка, конечная длина, внешнее гидростатическое давление, большие перемещения.

При изучении процесса развития больших перемещений точек нейтральной оси кольца, первоначально имеющего слабую овальность формы, была использована кинематическая схема: форма кольца (поперечного сечения бесконечно длинной оболочки) аппроксимируется сопряжением двух окружностей радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), рис. 1. Здесь ввиду центральной симметрии формы кольца рассматривается только первая четверть в осях XOY. Точка сопряжения C при малой начальной овальности, соответствующая значению полярного угла $\psi \approx \pi/4$, такова, что в ней внутренний изгибающий момент равен нулю. Считаем, что в точке сопряжения изгибающий момент в процессе деформирования равен нулю.

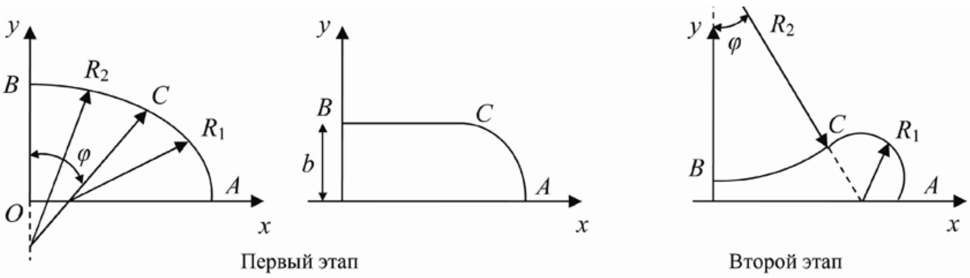

Рис. 1

Дальнейшее движение происходит так, что $b(t) \to 0$. Решение задачи доводится до состояния $b = 0$ – до полного сплющивания. При этом в случае ползучести (внешнее давление, достигнув некоторой величины, остается постоянным) возможно определить время сплющивания τ^* [1], для упругопластической оболочки – соответствующее значение параметра нагружения.

Рассматриваем цилиндрическую оболочку конечной длины, $-L \le z \le L$, с толщиной $2h$, поперечное сечение которой – овал с полудиаметрами a_0 и b_0 ($a_0 > b_0$). Ось OZ направлена перпендикулярно чертежу (см. рис. 1). Процесс сплющивания конечной оболочки происходит так, что существуют две плоскости симметрии – YOZ и XOZ. Пусть точкам B, C и A срединного сечения до начала процесса сплющивания в концевых сечениях соответствуют точки B', C' и A' ($z = -L$) и B'', C'' и A'' ($z = L$). Таким образом, образующая $B''BB'$ принадлежит плоскости YOZ, образующая $A''AA'$ – плоскости XOZ. Считаем, что при шарнирном опирании концевых сечений образующие $B''BB'$ и $A''AA'$ в течение процесса деформирования остаются полуволнами синусоиды; в случае жесткой заделки – аналогичные образующие являются косинусоидами; считаем, что в области $B'BB''C'CC''$ оболочка продавливается, в области $C'CC''A'AA''$ выпучивается [3]. Учет конечности оболочки скажется, прежде всего, в том, что появятся растягивающие усилия в осевом направлении (вдоль оси OZ), которые дадут составляющие по осям OY и OX, интегрально учитываемые при составлении уравнений равновесия участка оболочки в окрестности срединного поперечного сечения $z = 0$.

Принимаем основные положения полубезмоментной теории оболочек [2]: изгибающими моментами в плоскостях YOZ и XOZ пренебрегаем, учитываем только моменты в поперечных сечениях.

Решение проблемы в силу изложенных выше допущений сводится к рассмотрению задачи для системы двух нелинейных обыкновенных уравнений относительно первых производных $\dot{R}_1$ и $\dot{R}_2$ (по времени или по параметру нагружения).

Итак, система разрешающих уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{R}_1 = f_1(R_1, R_2, k, \delta, \gamma), \\ \dot{R}_2 = f_2(R_1, R_2, k, \delta, \gamma). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $k = 0.25$ или 0.5 соответственно при шарнирном опирании или жесткой заделке концевых сечений; $\delta = 2L/R_0$ – параметр удлинения; $\gamma = 2h/R_0$ – параметр толщины.

В таблице 1 приводятся результаты вычисления времени τ^* окончания первого этапа – появления горизонтального участка в срединном сечении при различных значениях параметра удлинения. Материал линейно вязкий, параметр толщины фиксирован, $\gamma = 0.01$; $\delta = \infty$ соответствует бесконечно длинной оболочке – кольцу. Время τ^* безразмерное.

Таблица 1

δ	$25 \le \delta \le \infty$	$10 \le \delta \le 25$	$\delta = 5$
τ^*	180	154	1080

Для линейной упругости в случае малых перемещений критическим назовем такое значение внешнего давления $p = p^*$, когда перемещения точки B стремятся к бесконечности – особенность решения системы (1) в случае ее линеаризации.

Получена формула критического давления для упругой оболочки конечной длины (ν – коэффициент Пуассона):

$$p^* = \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{R_0}\right)^3\left(\sqrt{2}+1+4k\left(\frac{\pi R}{2L}\right)^2\right). \quad (2)$$

В [4] при изучении равновесия круговой формы кольца под действием гидростатического давления получена формула критического по Эйлеру значения давления, когда по дуге окружности образуются две волны синусоиды. При замене изгибной жесткости кольца на цилиндрическую жесткость оболочки толщиной $2h$ получим критическое давление для бесконечно длинной оболочки:

$$p_Э = 2\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{R}\right)^3. \quad (3)$$

Из формулы (2) при $L \to \infty$ имеем

$$p^* = 2\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{R}\right)^3\frac{\sqrt{2}+1}{3},$$

то есть $p^* = 0.806p_Э$, результат представляется вполне естественным: в этом подходе при давлении $p > 0$ сразу начинается процесс деформирования, т.е. сечение оказывается более податливым, чем при эйлеровом рассмотрении.

Список литературы

1. Ванько В.И., Шестериков С.А. Сплющивание кольца в условиях ползучести // Инж. журнал. МТТ. 1966. №5.
2. Власов В.З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. М.: Стройиздат, 1949. 474 с.
3. Ванько В.И. Краевой эффект в задаче о сплющивании цилиндрической оболочки внешним давлением // Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики: Сб. науч. трудов. Киев: Ин-т математики НАНУ, 1997. С. 40–43.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 567 с.

A CYLINDRICAL SHELL UNDER UNIFORM EXTERNAL PRESSURE: NON-CLASSICAL SOLUTION OF THE LARGE DISPLACEMENTS PROBLEM

V.I. Vanko

The problem of large displacements of middle surface points of finite length shell (ring) under external hydrostatic pressure is solved on the base of kinematic model applying the collocation method, used in the previous work of the author (together with C.A. Shesterikov). Based on the condition of that the stable quasi-static process ends at the small deflections (relative to the average radius of non-deformed cross-section)б the enclosed expressions for crtical time(under the conditions of elongation) and critical pressure under the conditins of non-lnear elasticity).

Keywords: the cylindrical shell of infinite, finite length, external hydrostatic pressure, large displacements.