

УДК 539.3

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ В МЕХАНИКЕ

© 2011 г.

А.О. Ватulyян

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

vatulyan@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлены постановки и методы исследования коэффициентных обратных задач об определении переменных коэффициентов дифференциальных операторов, описывающих колебания в линейной механике деформируемого твердого тела (в том числе и при наличии связанности полей – термоупругость, поропругость, электроупругость).

Ключевые слова: коэффициентные обратные задачи, идентификация, колебания, связанность полей.

Коэффициентные обратные задачи – задачи об определении коэффициентов дифференциальных операторов, описывающих деформирование различных объектов в механике, – имеют большое значение для совершенствования моделей неоднородных сред, для развития новых неклассических моделей механики деформируемого твердого тела (МДТТ). Коэффициентные обратные задачи линейной МДТТ – интенсивно развивающийся в последние годы раздел теории обратных задач математической физики [1]. Подобные задачи стали особенно актуальны в связи с многочисленными приложениями в различных разделах, использующих модели механики неоднородных структур. В первую очередь отметим модели геофизики и горной механики, модели пенных и пористых сред, биологических тканей (задачи эластографии и мониторинга в медицинской диагностике тканей), проблемы акустического контроля свойств при создании функционально-градиентных материалов, композитов в рамках линейных моделей (упругие, вязкоупругие, пористоупругие, термоупругие, электроупругие среды), линеаризованные задачи определения структуры существенно неоднородного напряженного состояния. Для адекватного описания поведения таких объектов при динамическом воздействии необходим отказ от гипотезы однородности и использование моделей с переменными физическими характеристиками.

При этом все задачи об определении коэффициентов операторов по данным наблюдений или экспериментов могут быть разделены на два больших класса – задачи об определении постоянных характеристик и собственно коэффициентные обратные задачи, в которых необходимо опреде-

лять некоторые функции координат, характеризующие свойства неоднородной среды (модули упругости, коэффициенты теплопроводности, плотность и др.). К коэффициентным обратным задачам для линейных операторов приводят три типа задач.

Первый тип – собственно коэффициентные задачи, в которых требуется найти неоднородные характеристики твердых тел как функции координат. Этот тип задач, инициированный в первую очередь проблемами геофизики, исследовался достаточно давно; это направление развивалось на базе уравнений нестационарной теории упругости, в рамках которой решен ряд обратных одномерных задач для полупространства [2]. В настоящее время достигнут определенный прогресс при решении коэффициентных обратных задач для стержней и слоистых сред для термоупругих и вязкоупругих тел.

Второй тип – это задачи, к которым приводятся геометрические обратные задачи об определении форм полостей или включений малого характерного размера для стержней и пластин; для таких задач коэффициенты дифференциальных операторов отличны от постоянных значений лишь в некоторой малой подобласти исследуемого тела; для них требуется обычно определить переменную жесткость.

Третий тип коэффициентных обратных задач – об определении структуры существенно неоднородного предварительного напряженного состояния на основе акустического зондирования – практически неисследован; колебания упругих тел в условиях неоднородного предварительного напряженного состояния в линеаризованной постановке описываются краевой задачей для системы

дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые и необходимо определять на основе дополнительной информации.

При этом важными являются не только вопросы постановки таких задач, выбор классов идентифицируемых функций, формирование схемы съема информации, гарантирующей единственность, но и разработка эффективных вычислительных процедур, позволяющих в реальном масштабе времени получать устойчивые результаты при наличии зашумления входной информации. Наибольшую сложность при исследовании задач такого типа представляет построение операторных уравнений, связывающих искомые и измеряемые функции, которые, как правило, нелинейны, а отличительной особенностью рассматриваемого класса задач является некорректность. С развитием измерительных средств появилась возможность иметь данные о физических полях (амплитудно-частотных или амплитудно-временных) не только на поверхности, но и внутри исследуемого объекта в ответ на граничное нагружение. Это позволило рассмотреть различные постановки (в том числе и слабые) исследуемых задач и сформулировать два типа постановок в линейной МДТТ – линейную (при измерении полей внутри) и нелинейную (при измерении полей на границе).

Первая постановка приводит к простым линейным операторным соотношениям при исследовании обратной задачи, решение ее строится на основе либо анализа задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, либо на основе анализа эквивалентного уравнения Фредгольма первого рода. Главную трудность на этом пути в практическом плане представляет вычисление значений неограниченных операторов от функций, заданных в дискретном наборе точек, а простейшими способами осуществления регуляризации является использование сплайн-аппроксимаций при вычислении неограниченных операторов и метода регуляризации А.Н. Тихонова при построении решений уравнений Фредгольма первого рода.

Вторая постановка, в которой известны (измерены) лишь граничные поля физических полей в некотором частотном диапазоне (или временные зависимости для точек граничных поверхностей), гораздо более сложна, приводит к нелинейным операторным уравнениям типа Урысона, которые содержат промежуточные переменные – компоненты физических полей. Задачи в такой постановке могут быть исследованы лишь численно на основе некоторых итеративных процедур,

основные принципы построения которых опираются на метод линеаризации и слабую постановку [3]. Существенным моментом при организации итерационного процесса является подходящий выбор начального приближения среди функций простой структуры (линейных, кусочно-постоянных). Стандартная реализация итерационного процесса, опирающаяся на традиционную процедуру типа Ньютона, требует вычисления производных по Фреше от исходных операторов, однако использование слабой постановки в сочетании с процедурой линеаризации позволяет сразу получать операторные уравнения первого рода с компактными операторами относительно поправок. При этом на каждой итерации сочетается процедура решения прямой задачи для неоднородной среды на основе либо аппарата интегральных уравнений Фредгольма второго рода, либо конечно-элементных технологий и процедура обращения линейного вполне непрерывного оператора на основе метода А.Н. Тихонова.

Обсуждаются различные способы организации итерационных процессов при исследовании второй постановки обратных коэффициентных задач для широкого класса операторов, встречающихся при моделировании линейно деформируемых сред, в том числе для моделей связанных полей – термоупругость, электроупругость, порупругость, а также для линеаризованных моделей предварительного напряженного состояния. Представлен новый подход к исследованию широкого класса обратных задач, не требующий непрерывности искомых функций, основанный на слабой постановке исходной краевой задачи и билинейности порождающих их дифференциальных операторов. Предложена схема обращения операторов, возникающих при исследовании обратной коэффициентной задачи, позволяющая формировать новые принципы построения итерационных процессов с помощью сочетания решения прямой задачи и задачи Коши для дифференциального оператора первого порядка.

Приведены примеры реконструкции одномерных и двумерных функций для различных линейных моделей механики (стержневые и слоистые структуры для задач электроупругости, порупругости и термоупругости), исследованы особенности постановок в задачах о реконструкции модулей упругости, плотности, пьезоэлектрических характеристик и предварительного напряженного состояния, выявлены частотные диапазоны и режимы нагружения, обеспечивающие наилучшую реконструкцию, представлены экономичные способы построения нулевого приближения на основе априорной информации об ограниченности

искомых функций.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №10-01-00194-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы.

Список литературы

1. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике

деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.

2. Яхно В.Г. Обратные коэффициентные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990. 304 с.

3. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. Т. 74, №6. С. 911–918.

COEFFICIENT INVERSE PROBLEMS IN MECHANICS

A.O. Vatulyan

The formulations of the coefficient inverse problems of identification of the variable coefficients of differential operators describing the oscillations in the linear mechanics of deformable solids (including coupled fields cases – thermo-elasticity, poro-elasticity, electro-elasticity) and the methods of their investigation are given.

Keywords: coefficient inverse problems, identification, oscillations, coupled fields.