Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1423–1424

УДК 539.3

ДВУХМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

В.А. Вестяк, Д.В. Тарлаковский

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

tdv902@mai.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается нестационарная задача о распространении двухмерных волн от границы полубесконечной среды. Используются линеаризованные уравнения связанной электромагнитоупругости для изотропных проводников. Для решения применяется метод малого параметра, в качестве которого используется коэффициент связи механических и электромагнитных полей. Разрешающей является рекуррентная система начально-краевых задач для коэффициентов рядов по малому параметру. При этом соответствующее нулевое приближение является решением чисто упругой задачи. Показано, что для нахождения последующих приближений необходимо построить решения упругих задач при заданных нестационарных объемных возмущениях, которые существенно зависят от геометрии области. В качестве примеров рассматриваются полуплоскость или пространство со сферической полостью.

Ключевые слова: нестационарные волны, связанная электромагнитоупругость, двухмерная задача, метод малого параметра, рекуррентная система.

Уравнения движения электромагнитоупругой среды

Рассматривается частный случай электромагнитоупругой среды – изотропные проводники без учета температурных полей. Соответствующая замкнутая система линеаризованных уравнений движения может быть записана в виде [1]:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u} + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{F}_e,$$
$$\mathbf{F}_e = \alpha[\rho_{e0}\mathbf{E} + \rho_e\mathbf{E}_0 + \gamma([\mathbf{j}_0,\mathbf{H}] + [\mathbf{j},\mathbf{H}_0])], \quad (1)$$

$$\ddot{\mathbf{E}} + \gamma_e\dot{\mathbf{E}} = c_e^2(\Delta - \mathrm{grad\,div})\mathbf{E} - \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{u}}),$$
$$\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{u}}) = \gamma_v[\ddot{\mathbf{u}},\mathbf{H}_0] + \gamma_r\ddot{\mathbf{u}}, \quad (2)$$

где $\mathbf{u} = u^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{F}_e = F_e^i\mathbf{e}_i$ – векторы перемещения и силы Лоренца; $\mathbf{E} = E^i\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{H} = H^i\mathbf{e}_i$ – векторы напряженностей электрического и магнитного полей; $\mathbf{j} = j^i\mathbf{e}_i$ – плотность тока; $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ковариантный базис некоторой криволинейной системы координат ξ^1, ξ^2, ξ^3; ρ – плотность; λ и μ – упругие постоянные Ламе; ρ_e – плотность зарядов; α, γ, γ_e, γ_v, γ_r и c_e^2 – коэффициенты, выражающиеся через коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости ε и μ_e, коэффициент электропроводимости σ, скорость света c и ρ_{e0}; Δ – оператор Лапласа; точками обозначены производные по времени t; нижний индекс «0» соответствует значению величин в начальном состоянии.

При этом компоненты тензоров напряжений и деформаций σ_{ij} и ε_{ij} связаны с перемещениями так:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\nabla_i u_j + \nabla_j u_i}{2}, \quad \sigma_{ij} = \lambda g_{ij}\mathrm{div}\,\mathbf{u} + 2\mu\varepsilon_{ij},$$

где ∇_i – оператор ковариантного дифференцирования; g_{ij} – компоненты метрического тензора.

Напряженности полей, плотность тока и плотность зарядов должны удовлетворять следующим соотношениям электродинамики [2, 3]:

$$c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\mu_e\dot{\mathbf{H}}, \quad c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j} + \varepsilon\dot{\mathbf{E}},$$
$$\varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho_e, \quad (3)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mu_e c^{-1}[\dot{\mathbf{u}},\mathbf{H}_0]) + \rho_{e0}\dot{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

Полагается, что в начальный момент времени $t = 0$ возмущения в среде отсутствуют:

$$\mathbf{u}\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}\big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{E}\big|_{t=0} = 0,$$
$$\dot{\mathbf{E}}\big|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

Кроме того, рассматривается полуограниченная среда $\xi^1 \geq 0$, в которой имеют место только двухмерные волны, т.е. искомые функции зависят только от двух пространственных переменных ξ^1, ξ^2 и времени. При этом на границе $\xi^1 = \xi_0$ задаются кинематические или силовые и электродинамические условия, и решение в области $\xi^1 \geq \xi_0$ считается ограниченным.

Решение методом малого параметра

Даже в частных случаях одномерных волн решение системы уравнений (1), (2) не удается построить аналитически. Поэтому далее используется метод малого параметра, в качестве которого используется коэффициент α в формуле для силы Лоренца. С этой целью искомые функции представляются в виде степенных рядов

$$\mathbf{u} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{u}_m \alpha^m, \quad \mathbf{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}_m \alpha^m, \quad \mathbf{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{H}_m \alpha^m,$$

$$\mathbf{j} = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{j}_m \alpha^m, \quad \rho_e = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{em} \alpha^m.$$

Подстановка этих рядов в (1), (2) приводит к рекуррентной системе уравнений:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_0 = (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_0 + \mu\Delta\mathbf{u}_0, \qquad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{E}}_m + \gamma_e \dot{\mathbf{E}}_m = = c_e^2(\Delta - \operatorname{grad}\operatorname{div})\mathbf{E}_m - \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{u}}_m), \quad m \ge 0, \qquad (7)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}_m + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_m + \mu\Delta\mathbf{u}_m + \mathbf{g}_m,$$

$$\mathbf{g}_m = \rho_{e0}\mathbf{E}_{m-1} + \rho_{e(m-1)}\mathbf{E}_0 + + \gamma([\mathbf{j}_0, \mathbf{H}_{m-1}] + [\mathbf{j}_{m-1}, \mathbf{H}_0]), \quad m \ge 1.$$

Связь коэффициентов рядов для величин **E**, **H**, **j** и ρ_e вытекает из формул (3), (4):

$$c\operatorname{rot}\mathbf{E}_m = -\mu_e \dot{\mathbf{H}}_m, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}_m = 4\pi\mathbf{j}_m + \varepsilon\dot{\mathbf{E}}_m,$$

$$\varepsilon\operatorname{div}\mathbf{E}_m = 4\pi\rho_{em},$$

$$\mathbf{j}_m = \sigma(\mathbf{E}_m + \mu_e c^{-1}[\dot{\mathbf{u}}_m, \mathbf{H}_0]) + \rho_{e0}\dot{\mathbf{u}}_m, \quad m \ge 0.$$

Соответствующие начальные условия, как следует из равенств (5), остаются однородными:

$$\mathbf{u}_m\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}_m\big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{E}_m\big|_{t=0} = 0, \quad \dot{\mathbf{E}}_m\big|_{t=0} = 0 \quad (m \ge 0). \qquad (8)$$

Коэффициенты рядов должны быть ограниченными функциями в области $\xi^1 \ge \xi_0$, а граничные условия на поверхности $\xi^1 = \xi_0$ для них вытекают из конкретного вида условий для искомых функций.

Нестационарные поверхностные возмущения в полуплоскости и пространстве со сферической плоскостью

Начально-краевая задача (6)–(8) с соответствующими краевыми условиями при $m = 0$ является задачей о распространении двухмерных нестационарных поверхностных возмущений в упругой среде без учета взаимодействия с электромагнитным полем, а при $m \ge 1$ она является упругой задачей при заданных нестационарных объемных возмущениях. Решения всех этих задач существенно зависят от геометрии области. Рассматриваются полуплоскость $z \ge 0$ в прямоугольных декартовых координатах $\xi^1 = z$, $\xi^2 = x$, $\xi^3 = y$ и пространство $r \ge R$ со сферической полостью радиуса R. Например, в последнем случае для перемещений имеют место равенства (звездочки означают свертки по координате x и времени):

$$u_{mk}(x,z,\tau) = = \int_0^{\infty} G_{k1}(x,z,\xi,\tau) ** g_{m1}(x,\xi,\tau)d\xi + + \int_0^{\infty} G_{k3}(x,z,\xi,\tau) ** g_{m3}(x,\xi,\tau)d\xi$$

$$(k = 1,3).$$

Здесь u_{m1}, g_{m1} и u_{m3}, g_{m3} – проекции векторов $\mathbf{u}_m$, $\mathbf{g}_m$ на оси x и z соответственно; G_{kl} (k, $l = 1, 3$) – объемные функции Грина соответствующих задач.

Работа выполнена в рамках РФФИ (гранты №09-08-00470, 10-08-90412) и ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» (проект П2235).

Список литературы

1. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла: Зб. наук. праць Дніпропетр. націон. ун-та. Дніпропетровськ: ІМА-прес. 2009. Вип. 10. С. 57-62.

2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Электроупругость / Под. ред. А.Н. Гузя. Киев: Наук. думка, 1989. Т. 5. 280 с.

3. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. М.: МГУ, 1978. 287 с.

TWO-DIMENSIONAL TIME-DEPENDENT WAVES IN AN ELECTRO-MAGNETO-ELASTIC SEMI-BOUNDED MEDIUM

V.A. Vestyak, D.V. Tarlakovsky

A time-dependent problem of two-dimensional waves propagating from the boundary of a semi-infinite medium is described. Linear equations of coherent electromagnetoelasticity for isotropic conductors are used to formulate the problem. To obtain the solution, a small parameter method is used, where the small parameter is the quotient that characterizes the relation between mechanic and electromagnetic fields. The resolving system is formulated as a system of recurrent relations in terms of small parameter series' quotients. The null approximation is actually the solution for a purely mechanic problem. It is shown that in order to obtain higher order approximation one should first construct solutions for mechanical problems with specific time-dependent volumetric disturbances that depend on area's geometry. Solutions for half-plane and infinite medium with spherical cavity are used as examples of this approach.

Keywords: time-dependent waves, coherent electro-magneto-elasticity, two-dimensional problem, small parameter method, recurrent system.