Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1461–1462

УДК 539.37+514

СТРУКТУРА ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В НЕЕВКЛИДОВОЙ МОДЕЛИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© 2011 г.

М.А. Гузев

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

guzev@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Для неевклидовой модели сплошной среды, в которой внутренняя метрика и скалярная кривизна являются дополнительными параметрами, характеризующими структуру дефектов в материале, показано, что безвихревое поле перемещений для точек среды складывается из упругих перемещений в отсутствии дефектов и поля, характеризующего отличие внутренней геометрии модели от евклидовой геометрии. Соответствующие компоненты внутренних напряжений представляют сумму упругих напряжений и самоуравновешенных напряжений, определяемых скалярной кривизной. Доказано, что свойство инвариантности свободной энергии относительно градиентных преобразований, порождаемых деформацией упругой сплошной среды, определяет общую структуру поля внутренних напряжений, не зависящую от выбора взаимодействия. В качестве примера построено точное решение для вихревого поля дислокаций, сформулированы условия существования ненулевого поля напряжений, параметризуемого скалярной кривизной, в материале при отсутствии внешних сил.

Ключевые слова: дефекты структуры, упругие и самоуравновешенные напряжения, калибровочные преобразования, неевклидова геометрия.

Введение

В пятидесятые годы XX века исследователи предложили ввести неевклидовы геометрические объекты [1] для описания дефектов кристаллической структуры материалов. В [2] неевклидовы геометрические объекты использовались для параметризации ненулевых внутренних самоуравновешенных напряжений. Эти объекты вводились в [3] для расчета напряженно-деформированного состояния материала, содержащего дислокации. Однако в рамках неевклидовой модели сплошной среды даже при простейших предположениях о зависимости внутренней энергии от термодинамических переменных не исследовалась геометрическая структура поля перемещений и напряжений. В настоящем исследовании данный пробел восполнен для неевклидовой римановой модели сплошной среды.

Определяющие функции модели

Минимальный полный набор кинематических переменных для модели материала с дефектами структуры включает тензор Альманси a_{ij}, внутренний метрический тензор $g_{ij} = \delta_{ij} - 2\varepsilon_{ij}$ и скалярную кривизну R тензора Римана [4]. Рассматривается равновесное состояние и малые деформации, тогда $a_{ij} << 1$, $\varepsilon_{ij} << 1$. Для нахождения уравнений модели будем исходить из условия экстремальности свободной энергии, в которую тензорные характеристики входят через свои инварианты и совместные инварианты. Представим объемную плотность свободной энергии F в виде $F = F_0 + F_a + F_\varepsilon + F_{a\varepsilon} + F_R$, где F_0 – фиксированное значение энергии, от которого отсчитывается энергия напряженного состояния, F_a и F_ε зависят от a_{ij} и ε_{ij} соответственно; $F_{a\varepsilon}$ характеризует взаимодействие полей a_{ij} и ε_{ij}; F_R является функцией скалярного параметра R. Функции F_a и F_ε определяются через первый и второй инварианты соответствующих тензорных аргументов a_{ij} и ε_{ij}, $F_{a\varepsilon}$ зависит от произведения первых инвариантов a_{kk} и ε_{kk} или от совместных инвариантов a_{ij} и ε_{ij}.

Основные результаты

Показано, что для рассматриваемой неевклидовой модели сплошной среды безвихревое поле перемещений дается формулой:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\mathbf{cl}} + \alpha \nabla R.$$

Здесь R – поле, которое создали бы в бесконечной среде дефекты, а поле $\mathbf{U}_{\mathbf{cl}}$ совпадает с решением классической модели упругой сплошной среды (α – феноменологический параметр). Поле напряжений и σ_{ij} внутри материала представимо в виде $\sigma_{ij} = \Sigma_{ij} + T_{ij}$, где Σ_{ij} – поле упругих напряжений, T_{ij} – самоуравновешенное поле, определяемые дефектами структуры материала. При этом поле T_{ij} удовлетворяет уравнениям механического равновесия и имеет вид

$$T_{ij} = c\left(\delta_{ij}\Delta R - \frac{\partial^2 R}{\partial x^i \partial x^j}\right),$$

c – параметр модели.

Доказано, что структура поля перемещений и напряжений не зависит от взаимодействия между полями a_{ij} и ε_{ij}. Показано, что в основе этого факта лежит свойство инвариантности свободной энергии относительно градиентных (калибровочных) преобразований $\varepsilon_{ij} \to \varepsilon_{ij} + \varphi_{ij}$, порождаемых деформацией упругой сплошной среды:

$$\varphi_{ij} = \partial \mathbf{U}^i_{\mathbf{cl}} / \partial x^j + \partial \mathbf{U}^j_{\mathbf{cl}} / \partial x^j.$$

В качестве приложения полученных соотношений рассматривается задача о равновесии дислокаций клиновидного типа в цилиндре радиуса r_0 в условиях плоской деформации. Для этого случая скалярная кривизна R является единственным инвариантом для тензора Римана. Распределение для поля перемещений и напряжений дается формулами:

$$U = ar - D\frac{dR}{dr},$$

$$\sigma_{rr} = P + 2\mu D\left[\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{1}{r_0}\frac{dR}{dr}\bigg|_{r=r_0}\right],$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = P - 2\mu D\left[\frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \gamma R + \frac{1}{r_0}\frac{dR}{dr}\bigg|_{r=r_0}\right],$$

a, D, μ – феноменологические параметры. Отсюда видно, что в отсутствие внешних сил ($P = 0$), компоненты напряжений отличны от нуля, что с точки зрения физики связано с присутствием дефектов.

Для определения всех постоянных в модели необходимо задать дополнительные условия, кроме тех, что обычно формулируются в классической теории упругости. К ним, например, можно отнести указание масштаба изменения микроструктуры, распределение напряжений внутри образца в отдельных точках.

Список литературы

1. Bilby B.A., Bullough R., Smith E. // Proc. Roy. Soc. A. 1955. V. 231. P. 263–273.
2. Мясников В.П., Гузев М.А. // Докл. РАН. 2001. Т. 380, №5. С. 627–629.
3. Киселев С.П. // ПМТФ. 2004. Т. 45, №4. С. 131–136.
4. Guzev M. Non-Euclidean Models of Elastoplastic Materials with Structure Defects. LAP LAMBERT Academic Publishing. 2010.

THE STRUCTURE OF THE STRESS AND DISPLACEMENT FIELD IN THE NON-EUCLIDEAN CONTINUUM MODEL

M.A. Guzev

Non-euclidean continuum model, in which the intrinsic metric and the scalar curvature are additional parameters characterizing the structure of defects in the material, is considered. It is shown that the irrotational displacement field is formed of elastic displacements in the absence of defects and the field which characterizes the difference between the intrinsic geometry of the model of Euclidean geometry. Corresponding components of the internal stresses represent the sum of elastic stresses and self-balanced stress defined by the scalar curvature. It is proved that the invariance of the free energy with respect to gauge transformations is generated by the deformation of the elastic continuum. This property determines the general structure of the internal stress field that does not depend on the choice of interaction. Application of the proposed approach is demonstrated for construction of the exact solution in the case of the vorticity field of the dislocations for the material in the absence of external forces. Conditions for the existence of a non-zero stress field parametrized by the scalar curvature are formulated.

Keywords: structural defects, elastic and self-balanced stresses, gauge transformations, non-Euclidean geometry.