Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1466–1467

УДК 539.3

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ШАРА

Н.Г. Гурьянов, О.Н. Тюленева

Казанский федеральный университет

Nikolai.Gurjyanov@ksu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

В сферической системе координат строится точное решение несимметричной линейной задачи термоупругости для полого шара. Рассмотрены деформация сферического резервуара, заполненного жидкостью, в заданном температурном поле и деформация жестко защемленного по основанию купола.

Ключевые слова: температура, деформация, линейная теория упругости, точное решение, резервуар, купол.

Система разрешающих уравнений относительно температуры T, перемещений (u, v, w) и объемного расширения θ при отсутствии массовых сил может быть записана следующим образом

$$\Delta T = 0,\qquad \Delta Q = 0, \tag{1}$$

$$\left(\Delta + \frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho^2}\right)w + \frac{1}{(1-2\upsilon)}\frac{\partial}{\partial\rho}[\theta - 2(1+\upsilon)\alpha_T T] - \frac{2}{\rho}\theta = 0,$$

$$\left(\Delta - \frac{1}{\rho^2\sin^2\alpha}\right)(u \pm v) \pm \frac{2\mathrm{ctg}\alpha}{\rho^2\sin\alpha}\frac{\partial(u \mp v)}{\partial\beta} + \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \pm \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left\{\frac{2}{\rho^2}w + \frac{1}{(1-2\upsilon)\rho}[\theta - 2(1+\upsilon)\alpha_T T]\right\} = 0.$$

Здесь υ – коэффициент Пуассона, α_T – коэффициент линейного расширения материала, Δ – оператор Лапласа:

$$\Delta \equiv \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sin\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin^2\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right]. \tag{2}$$

Решение системы уравнений (1) должно удовлетворять условию

$$\theta = \frac{1}{\rho}\left[\rho\frac{\partial w}{\partial\rho} + 2w + \frac{\partial u}{\partial\alpha} + u\mathrm{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta}\right], \tag{3}$$

что следует из [1].

Интегрируя уравнение теплопроводности и уравнение относительно θ, получаем

$$T(\alpha,\beta,\rho) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}[B_{mn}^1\rho^n + B_{mn}^2\rho^{-(n+1)}]P_n^m(\cos\alpha)\cos(m\beta),$$

$$\theta(\alpha,\beta,\rho) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}[C_{mn}^1\rho^n + C_{mn}^2\rho^{-(n+1)}]P_n^m(\cos\alpha)\cos(m\beta).$$

Здесь $P_n^m(\cos\alpha)$ – присоединенная функция Лежандра ($P_n^m(\cos\alpha) = 0$ при $m > n$), $P_n^0(\cos\alpha) = P_n(\cos\alpha)$ – полиномы Лежандра, $B_{mn}^1, B_{mn}^2, C_{mn}^1, C_{mn}^2$ – постоянные интегрирования.

Далее строится решение третьего уравнения системы (1):

$$w(\alpha,\beta,\rho) = -\frac{1}{1-2\upsilon}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\left\{C_{mn}^3\rho^{n-1} + C_{mn}^4\rho^{-(n+2)} + \frac{nL_{mn}^1 - 2(1-2\upsilon)C_{mn}^1}{2(2n+3)}\rho^{n+1} + \frac{(n+1)L_{mn}^2 + 2(1-2\upsilon)C_{mn}^2}{2(2n-1)}\rho^{-n}\right\}P_n^m(\cos\alpha)\cos(m\beta).$$

Представляя перемещение вдоль меридиана u и вдоль параллели v в виде рядов

$$u(\alpha, \beta, \rho) = -\frac{1}{1-2\upsilon}\sum_{m=0}^{\infty}u_m\cos(m\beta),$$

$$v(\alpha, \beta, \rho) = -\frac{1}{1-2\upsilon}\sum_{m=1}^{\infty}v_m\sin(m\beta),$$

из последних двух уравнений определяем

$$u_m + v_m = \sum_{n=m}^{\infty}g_{mn}\left[\frac{d}{d\alpha} - \frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha) = \sum_{n=m}^{\infty}g_{mn}\,\mathrm{tg}^m\frac{\alpha}{2}\frac{d}{d\alpha}\left[P_n^m(\cos\alpha)\mathrm{ctg}^m\frac{\alpha}{2}\right],$$

$$u_m - v_m = \sum_{n=m}^{\infty} e_{mn}\left[\frac{d}{d\alpha} + \frac{m}{\sin\alpha}\right]P_n^m(\cos\alpha) =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} e_{mn}\,\mathrm{ctg}^m\frac{\alpha}{2}\frac{d}{d\alpha}\left[P_n^m(\cos\alpha)\mathrm{tg}^m\frac{\alpha}{2}\right],$$

причем

$$g_{mn} = C_{mn}^5\rho^n + C_{mn}^6\rho^{-(n+1)} +$$

$$+\frac{1}{n}C_{mn}^3\rho^{n-1} - \frac{1}{n+1}C_{mn}^4\rho^{-(n+2)} +$$

$$+\frac{(n+3)L_{mn}^1 + 2(1-2\upsilon)C_{mn}^1}{2(n+1)(2n+3)}\rho^{n+1} -$$

$$-\frac{(n-2)L_{mn}^2 - 2(1-2\upsilon)C_{mn}^2}{2n(2n-1)}\rho^{-n},$$

коэффициенты e_{mn} отличаются от g_{mn} знаками первых двух слагаемых, $v_0 \equiv 0$,

$$L_{mn}^1 = C_{mn}^1 - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{mn}^1,$$

$$L_{mn}^2 = C_{mn}^2 - 2(1+\upsilon)\alpha_T B_{mn}^2.$$

Из условия (3) следует, что $C_{00}^2 = C_{00}^3 = 0,\ \tilde{N}_{0n}^5 = = \tilde{N}_{0n}^6 = 0$.

После определения из закона Гука напряжений выполняются краевые условия на внешней $\rho = R$ и внутренней $\rho = r$ поверхностях шара. Для этого заданные на этих поверхностях функции разлагаются в двойные ряды по шаровым функциям, как это проделано в работе [1]. Постоянные интегрирования B_{mn}^1, B_{mn}^2 позволяют выполнить различные условия теплового взаимодействия шара с внешней средой. Статические, кинематические, а также некоторые смешанные условия на граничных поверхностях выполняются с помощью постоянных

$$C_{mn}^1, C_{mn}^2, C_{mn}^3, C_{mn}^4, C_{mn}^5, C_{mn}^6.$$

Сходимость рядов для случая осесимметричной деформации шара доказывается с помощью признака Абеля.

Рассмотрены следующие частные задачи.

Задача о деформировании заполненного жидкостью сферического резервуара, внутренняя поверхность которого термоизолирована. Внешняя поверхность, нагреваемая косыми солнечными лучами, жестко закреплена по параллели $\alpha = \alpha_0$, силы реакции опоры направлены к центру шара, их величина меняется вдоль параллели.

Рассмотрен случай деформирования такого же резервуара под прямыми солнечными лучами – деформация симметрична относительно оси, соединяющей полюса шара, т.е. не меняется вдоль параллели. Резервуар опирается на полосу шириной h, силы реакции направлены к центру шара и не зависят от координаты α.

Исследуется осесимметричная деформация купола, представляющего собой верхнюю половину шара, основание которого лежит на жесткой горизонтальной плите. Внутренняя поверхность купола термоизолирована, внешняя поверхность нагревается по закону $T(\alpha, R) = t/2(1 + \cos\alpha)$, t – температура вершины купола. Основание купола не может отрываться от плиты, но допустимо свободное проскальзывание вдоль нее.

Список литературы

1. Гурьянов Н.Г., Тюленева О.Н. Краевые задачи теории упругости для шара и цилиндра. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2008. 207 с.

THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A SPHERE

N.G. Gurjyanov, O.N. Tyuleneva

The exact solution of the asymmetrical linear thermoelasticity problem is constructed in the spherical coordinates system. Deformation of a spherical tank, filled with a liquid in the temperature field, and deformation of the dome rigidly jammed on the basis have been considered.

Keywords: temperature, deformation, linear theory of elasticity, analytical solution , tank, dome.