Механика деформируемого твердого тела
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1468–1469

УДК 539.311

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КОЛЬЦА

С.В. Данилова, М.Ф. Кулагина

Чувашский госуниверситет им. И.Н. Ульянова, Чебоксары

kulagina_mf@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается первая основная задача теории упругости для двухслойного концентрического кольца, составленного из двух колец с различными модулями упругости и коэффициентами Пуассона.

Ключевые слова: теория упругости, двухслойное концентрическое кольцо.

Решается задача в следующей постановке: найти упругое равновесие кольца, составленного из двух колец $R_1 \le r \le R_2$ и $R_2 \le r \le R_3$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ с модулями упругости E^{I}, E^{II} и коэффициентами Пуассона ν^{I}, ν^{II}, для случая плоского напряженного состояния.

На окружностях $r = R_1$ и $r = R_3$ заданы напряжения в виде рядов Фурье:

$$\sigma^{\mathrm{I}}{}_r(r,\theta)\Big|_{r=R_1} = c_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n^{(1)}\cos n\theta + d_n^{(1)}\sin n\theta],$$

$$\tau^{\mathrm{I}}{}_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=R_1} = a_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^{(1)}\cos n\theta + b_n^{(1)}\sin n\theta],$$

$$\sigma^{\mathrm{II}}{}_r(r,\theta)\Big|_{r=R_3} = c_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n^{(3)}\cos n\theta + d_n^{(3)}\sin n\theta],\tag{1}$$

$$\tau^{\mathrm{II}}{}_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=R_3} = a_0^{(3)} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^{(3)}\cos n\theta + b_n^{(3)}\sin n\theta],$$

где

$b_1^{(1)} = c_1^{(1)}$, $a_1^{(1)} = -d_1^{(1)}$, $b_1^{(3)} = c_1^{(3)}$, $a_1^{(3)} = -d_1^{(3)}$.

Здесь и ниже, верхний индекс I соответствует кольцевой области $R_1 \le r \le R_2$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ с параметрами ν^{I}, E^{I}, а индекс II – $R_2 \le r \le R_3$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ с параметрами ν^{II}, E^{II}.

На окружности $r = R_2$ заданы условия жесткого сцепления:

$$\begin{aligned}
u^{\mathrm{I}}(r,\theta)\Big|_{r=R_2} &= u^{\mathrm{II}}(r,\theta)\Big|_{r=R_2},\\
\tau^{\mathrm{I}}{}_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=R_2} &= \tau^{\mathrm{II}}{}_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=R_2},\\
v^{\mathrm{I}}(r,\theta)\Big|_{r=R_2} &= v^{\mathrm{II}}(r,\theta)\Big|_{r=R_2},\\
\sigma^{\mathrm{I}}{}_r(r,\theta)\Big|_{r=R_2} &= \sigma^{\mathrm{II}}{}_r(r,\theta)\Big|_{r=R_2}.
\end{aligned}\tag{2}$$

Предполагается, что точка с координатами $(R_0, 0)$, где $R_1 < R_0 < R_2$, жестко закреплена, т.е. смещения и вращение в этой точке отсутствуют.

Для смещений и напряжений записываются выражения Папковича – Нейбера через три гармонические функции, две из которых связаны условиями Коши – Римана. Подставляя структуры гармонических функций в выражения Папковича – Нейбера, получим структуру напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_r(r,\theta) &= B_0^0 r^{-2} + 2A_1^1 - 2B_1^0 r^{-3}\cos\theta -\\
&- 2D_1^0 r^{-3}\sin\theta + 2A_2^1 r\cos\theta + 2C_2^1 r\sin\theta +\\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\{[-n(n-1)A_n^0 r^{n-2} - n(n+1)B_n^0 r^{-n-2} +\\
&+ (n+1)(n+2)A_{n+1}^1 r^n + (n-1)(n-2)B_{n-1}^1 r^{-n}]\times\\
&\times\cos n\theta + [-n(n-1)C_n^0 r^{n-2} - n(n+1)D_n^0 r^{-n-2} +\\
&+ (n+1)(n+2)C_{n+1}^1 r^n + (n-1)(n-2)D_{n-1}^1 r^{-n}]\sin n\theta\},\\
\tau_{r\theta}(r,\theta) &= -2B_1^0 r^{-3}\sin\theta + 2D_1^0 r^{-3}\cos\theta +\\
&+ 2A_2^1 r\sin\theta - 2C_2^1 r\cos\theta +\\
&+ \sum_{n=2}^{\infty}\{[-n(n-1)C_n^0 r^{n-2} + n(n+1)D_n^0 r^{-n-2} -\\
&- n(n+1)C_{n+1}^1 r^n + n(n-1)D_{n-1}^1 r^{-n}]\cos n\theta +\\
&+ [n(n-1)A_n^0 r^{n-2} - n(n+1)B_n^0 r^{-n-2} + n(n+1)\times\\
&\times A_{n+1}^1 r^n - n(n-1)B_{n-1}^1 r^{-n}]\sin n\theta\}
\end{aligned}\tag{3}$$

и смещений:

$$\begin{aligned}
2Gu(r,\theta) &= (\kappa-1)A_1^1 r - B_0^0 r^{-1} + [\kappa A_0^1 - A_1^0 +\\
&+ B_1^0 r^{-2} + (\kappa-2)A_2^1 r^2]\cos\theta + [\kappa A_0^2 - C_1^0 + D_1^0 r^{-2} +\\
&+ (\kappa-2)C_2^1 r^2]\sin\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\{[-nA_n^0 r^{n-1} + nB_n^0 r^{-n-1} +\\
&+ (\kappa-n-1)A_{n+1}^1 r^{n+1} + (\kappa+n-1)B_{n-1}^1 r^{-n+1}]\cos n\theta +\\
&+ [-nC_n^0 r^{n-1} + nD_n^0 r^{-n-1} + (\kappa-n-1)C_{n+1}^1 r^{n+1} +\\
&+ (\kappa+n-1)D_{n-1}^1 r^{-n+1}]\sin n\theta\},\\
2Gv(r,\theta) &= -(\kappa+1)C_1^1 r + [\kappa A_0^2 - C_1^0 - D_1^0 r^{-2} -
\end{aligned}$$

$$-(\kappa+2)C_2^1r^2]\cos\theta-[\kappa A_0^1-A_1^0-B_1^0r^{-2}-$$
$$-(\kappa+2)A_2^1r^2]\sin\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\{[-nC_n^0r^{n-1}-nD_n^0r^{-n-1}-$$
$$-(\kappa+n+1)C_{n+1}^1r^{n+1}+(\kappa-n+1)D_{n-1}^1r^{-n+1}]\cos n\theta-$$
$$-[-nA_n^0r^{n-1}-nB_n^0r^{-n-1}-(\kappa+n+1)A_{n+1}^1r^{n+1}+$$
$$+(\kappa-n+1)B_{n-1}^1r^{-n+1}]\sin n\theta\}. \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в граничные условия (1) и (2) и приравнивая коэффициенты при $\cos n\theta$ и $\sin n\theta$, получим две системы линейных алгебраических уравнений 8 порядка. Исследованы определители систем. Показано, что системы имеют единственное решение, которое находится по формулам Крамера. Доказано, что ряды, дающие напряжения и перемещения, сходятся.

В числовых расчетах рассмотрена задача о равновесии кольца, составленного из меди и железа, в следующей постановке: пусть область $1 \le r \le 2$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ занимает медь ($\nu^{\mathrm{I}} = 0.25$, $E^{\mathrm{I}} = 1.37\cdot10^{11}$), а область $2 \le r \le 4$ $(-\pi \le \theta \le \pi)$ – железо ($\nu^{\mathrm{II}} = 0.26$, $E^{\mathrm{II}} = 1.68\cdot10^{11}$).

Граничные условия представлены следующим образом:

$$\sigma^{\mathrm{I}}{}_r(r,\theta)\Big|_{r=1} = \cos\theta, \quad \sigma^{\mathrm{II}}{}_r(r,\theta)\Big|_{r=4} = 3\cos\theta,$$
$$\tau^{\mathrm{I}}{}_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=1} = \sin\theta, \quad \tau^{\mathrm{II}}{}_{r\theta}(r,\theta)\Big|_{r=4} = 3\sin\theta.$$

Решение определятся из (2) и (3). Построены графики приближения решений

$$\sigma^{\mathrm{I}}{}_r(r,\theta),\ \sigma^{\mathrm{II}}{}_r(r,\theta),\ \tau^{\mathrm{I}}{}_{r\theta}(r,\theta),\ \tau^{\mathrm{II}}{}_{r\theta}(r,\theta)$$

к граничным условиям. На рис. 1 изображено приближение $\sigma_r(r,\theta)(r\to1)$ к $\sigma_r(r,\theta)\big|_{r=1} = \cos\theta$. На рис. 2 изображено приближение $\tau_{r\theta}(r,\theta)(r\to\to1)$ к $\tau_{r\theta}(r,\theta)\big|_{r=1} = \sin\theta$.

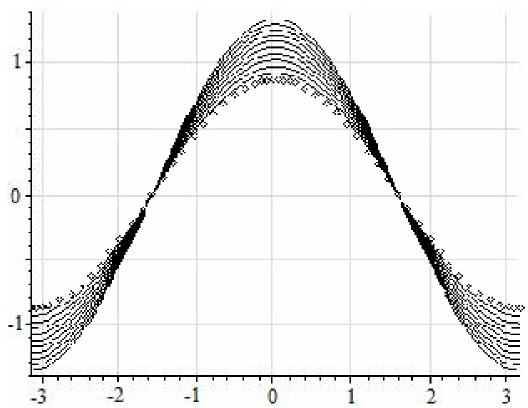

Рис. 1

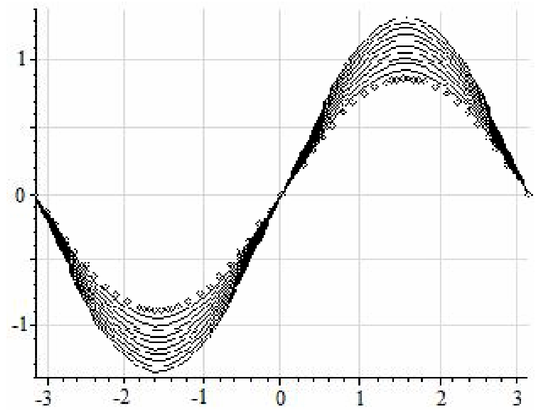

Рис. 2

ON A CONTACT PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A COMPOUND RING

S.V. Danilova, M.F. Kulagina

The first basic problem of the theory of elasticity for a two-layer concentric ring made of two rings with different modules of elasticity and Poisson ratios is considered.

Keywords: theory of elasticity, two-layer concentric ring.