

УДК 539.3

О РЕКОНСТРУКЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

© 2011 г.

В.В. Дударев, Р.Д. Недин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

dudarev_vv@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлена общая постановка задачи о реконструкции поля предварительных напряжений при анализе установившихся колебаний. Предложены методы решения прямых задач об определении компонент вектора перемещения для одномерных (интегральные уравнения Фредгольма второго рода) и двухмерных (метод конечных элементов) областей. Даны практические рекомендации по идентификации одноосного предварительного напряженного состояния. Для решения обратной задачи описан итерационный процесс на основе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода с использованием регуляризирующей процедуры А.Н. Тихонова. Дана краткая характеристика численных экспериментов по восстановлению монотонных и немонотонных законов изменения неизвестной функции.

Ключевые слова: остаточные напряжения, обратная задача, неоднородное предварительное напряженное состояние, некорректная задача.

Введение

В настоящее время одним из важных направлений развития механики разрушения является проблема исследования остаточных напряжений в твердых телах. Остаточными или предварительными напряжениями называются такие напряжения, которые существуют в теле при отсутствии внешних нагрузок (силовых или температурных) [1]. Обычно подобные напряжения возникают в ходе различных технологических процессов: литья, сварки, скрутки, раскрутки, прокатки, закаливания, резкого изменения температурного режима,ковки и т.д. Также они могут «накапливаться» в теле при продолжительных эксплуатационных нагрузках. Область локализации таких напряжений сосредоточена в окрестности различных неоднородностей и дефектов (трещины или полости). В силу своей природы, остаточные напряжения явным образом никак не проявляют себя. С другой стороны, при наложении критических нагрузок такие напряжения приводят к разрушениям.

Проблема идентификации и моделирования предварительно напряженного тела интересовала исследователей-механиков еще с конца XVIII века. На сегодняшний день существуют несколько методов определения остаточных напряжений: разрушающие, полуразрушающие и неразрушающие. Первые два класса методов хорошо разработаны и имеют достаточно высокую степень точности. Методы, относящиеся к третьему классу,

считаются наиболее востребованными, поскольку используются при диагностике объектов ответственного назначения. Одним из эффективных и хорошо зарекомендовавших себя способов неразрушающей идентификации является акустический метод. В его основе лежит процесс определения неизвестных данных по амплитудно-частотной характеристике (АЧХ), которая может быть снята с доступной для исследования части тела.

Общая постановка задачи

Рассмотрим упругое тело объемом V , ограниченное поверхностью $S = S_u \cup S_\sigma$, с постоянными Ламе λ , μ и плотностью ρ . Будем считать, что в рассматриваемом объекте имеется некоторое неоднородное предварительное напряженное состояние, характеризующееся компонентами тензора напряжений σ_{ij}^0 . Пусть колебания вызываются нагрузкой $p_j e^{i\omega t}$, приложенной на части S_σ , а часть S_u закреплена. Линеаризованные уравнения колебаний после отделения временного множителя имеют вид [2, 3]:

$$\begin{aligned} T_{ij,j} + \rho \omega^2 u_i &= 0, & T_{ij} &= \sigma_{ij} + u_{i,m} \sigma_{mj}^0, \\ \sigma_{ij} &= \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(u), & u_i|_{S_u} &= 0, \\ T_{ij} n_j|_{S_\sigma} &= p_i, \end{aligned}$$

где $\varepsilon_{ij}(u) = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i})$ – компоненты тензора малых деформаций.

В качестве дополнительной информации в обратной задаче об определении компонент σ_{ij}^0

предлагается воспользоваться данными об измеряемых на границе S_σ компонентах поля смещений f_i в зависимости от частоты колебаний $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$. Сформулированная обратная задача относится к классу нелинейных некорректных задач. Одним из эффективных способов решения подобных коэффициентных обратных задач является метод организации итерационных процессов.

О задачах для предварительно напряженных тел

В работе [4] была сформулирована вариационная постановка о колебаниях предварительно напряженных тел:

$$\delta(\Pi - K + \Pi_\sigma),$$

где

$$\Pi = 0.5 \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dv - \int_{S_\sigma} p_i u_i ds$$

– потенциальная энергия,

$$K = 0.5 \omega^2 \int_V \rho u_i^2 dv$$

– кинетическая энергия,

$$\Pi_\sigma = 0.5 \int_V \sigma_{mj}^0 u_{i,m} u_{i,j} dv.$$

На основе данной вариационной постановки получены уравнения изгибных [4], продольных и крутильных колебаний стержня при наличии одноосного предварительно напряженного состояния. В одномерном случае решение прямой задачи об определении функции смещения может быть сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода. Для решения задачи об определении компонент вектора смещения в случае двумерных областей использованы конечно-элементные технологии. Одним из пакетов, позволяющих производить необходимые расчеты, является программный пакет FreeFem++. Для описания модели предварительно напряженного тела в данной программе необходима слабая постановка, которая имеет вид

$$\int_V [\lambda \operatorname{div} \underline{u} \operatorname{div} \underline{v} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\underline{u}) \varepsilon_{ij}(\underline{v}) + u_{i,m} v_{i,j} \sigma_{mj}^0 - \omega^2 \rho u_i v_i] dV - \int_{S_\sigma} P_i v_i dS = 0,$$

где v_i – пробные функции, удовлетворяющие следующему условию на границе $v_i|_{S_u} = 0$.

Анализ влияния величины одноосного напряженного состояния на АЧХ тела в одномерном и двумерном случаях показал, что это влияние наиболее заметно для частот, находящихся не выше третьей резонансной частоты (для величины $10^{-2} \leq \sigma_{11}^0 / E \leq 10^{-3}$). На основе полученных данных можно сказать, что процедуру реконструк-

ции следует проводить в частотном диапазоне, находящемся до третьей резонансной частоты, исключая частоты резонансов.

Решение обратной задачи об определении закона изменения одноосного предварительно напряженного состояния $\sigma_{11}^0 \neq 0$ реализовано с помощью итерационных процессов. Для вычисления необходимых поправок сформулировано интегральное уравнение Фредгольма (ИУФ) 1-го рода. Решение полученного ИУФ организовано с использованием метода А.Н. Тихонова при автоматическом выборе параметра регуляризации. На первом шаге итерационного процесса начальное приближение можно выбирать в классе линейных функций вида $y = ax + b$. Коэффициенты a, b определяются из условия минимума функционала невязки

$$J = \int_{\omega_1}^{\omega_2} (\underline{u}(\omega)|_{S_\sigma} - \underline{f}(\omega))^2 d\omega$$

на некотором компакте, построенном по априорной информации об ограниченности восстанавливаемой функции $|\sigma_{11}^0| \leq C$.

Эффективность предложенного метода решения обратной задачи для определения существенно неоднородного предварительно напряженного состояния в одномерных и плоских областях продемонстрирована в серии численных экспериментов [4, 5]. Для монотонных законов восстанавливаемой функции относительная погрешность составила не более 10%. В стержневых моделях немонотонные законы восстанавливались существенно хуже.

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю проф. А.О. Ватульяну за предложенные пути решения задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00194) и в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт №П596).

Список литературы

1. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: Машгиз, 1963. 232 с.
2. Гузь А.Н., Махорт Ф. Г., Гуша О. И. Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
3. Ватульян А.О. Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. ун-та. 2007. Вып. 54, №4. С. 93–103.
4. Ватульян А.О., Дударев В.В. О некоторых проблемах реконструкции неоднородного предварительно напряженного состояния в упругих телах // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9, вып. 4, ч. 2. С. 25–32.

5. Вагульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д., Саакян Я.Г. О некоторых задачах идентификации предварительных напряжений // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV Междунар. конф. Ростов-на-Дону, Азов, 19 - 24 июня 2010 г. Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2010. Т. 1. С. 86–90.

ON RESTORING OF RESIDUAL STRESSES IN SOLID BODIES

V.V. Dudarev, R.D. Nedin

A general formulation of the prestress field reconstruction problem in the analysis of the stationary vibration is represented. The direct problem solving methods of determining the displacement vector components for one-dimensional (Fredholm integral equations of the second kind) and two-dimensional (FEM) areas are proposed. The practical recommendations of the uniaxial prestress state identification are given. The iterative process based on solving the Fredholm integral equation of the first kind using Tikhonov's regularization procedure is described for solving the inverse problem. Numerical experiments on the reconstruction of monotonic and nonmonotonic unknown function are briefly characterized.

Keywords: residual stresses, inverse problem, inhomogeneous prestressed state, ill-posed problem.