

УДК 539.3

АЖУРНАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ© 2011 г. *А.В. Жидков¹, С.В. Зефиоров², К.А. Кастальская², С.В. Спиринов², Д.Т. Чекмарев¹*¹Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского²НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

zhidkov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается явная ажурная схема «крест» решения трехмерных геометрически и физически нелинейных нестационарных задач теории упругости и пластичности. Схема построена на базе линейных четырехузловых конечных элементов в виде тетраэдра. Ажурное расположение расчетных элементов, покрывающих расчетную область с регулярными промежутками, позволяет существенно сократить время счета при сохранении точности решения. Обсуждаются проблемы реализации схемы. Приводятся решения тестовых задач. Проведено сравнение точности и эффективности численных решений с решениями на основе традиционных схем.

Ключевые слова: явная схема, метод конечного элемента, теория упругости и пластичности, нестационарная задача.

Ажурная сетка конечных элементов

Описание принципов построения ажурных схем методом конечных элементов дано в [1, 2]. Основной схемой является ажурная сетка конечных элементов. Рассмотрим метод построения регулярной ажурной сетки. Пусть сетка состоит из шестигранных ячеек. Если разбить каждый шестигранник на тетраэдры и принять их в качестве элементов, получим схему линейного конечного элемента. Если же внутри каждого шестигранника выделить один центральный тетраэдр, как показано на рис. 1, и удалить остальные тетраэдры, получим ажурную сетку. При этом в расчетах также не будет участвовать и половина узлов сетки (рис. 2, 3).

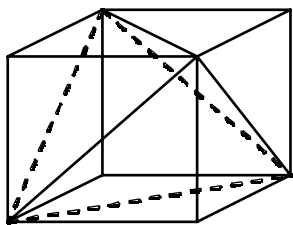


Рис. 1. Элемент ажурной сетки

Поэтому ажурная схема при ячейках того же размера имеет вдвое меньше узлов. В окрестности каждого внутреннего узла регулярной области сходятся по 8 ячеек. Минимально необходимое число ячеек равно четырем. Поэтому данную сетку можно дополнительно проредить, удалив в каж-

дом втором внутреннем шестиграннике по тетраэдру. Удаление проводится в шахматном порядке. В результате придем к конфигурации, изображенной на рис. 4.

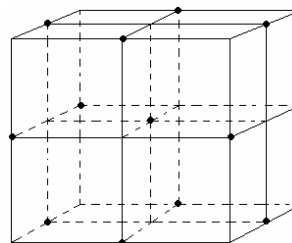


Рис. 2. Шаблон ажурной сетки. Выделены узлы,

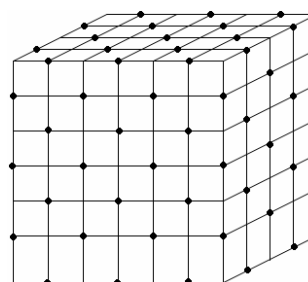


Рис. 3. Регулярная сетка. Выделены узлы, участвующие в расчетах

Отметим, что схему расположения ячеек, изображенную на рис. 4, можно применять только в регулярных областях. Поэтому в качестве базовой ажурной сетки принимается сетка с 8 ячейками, инцидентными узлу. Для нее предложен общий метод построения, применимый как

к регулярным, так и к нерегулярным исходным сеткам из шестигранных ячеек, позволяющий применять для ее построения свободно распространяемые и коммерческие сеточные генераторы, входящие в состав программных комплексов ANSYS и др.

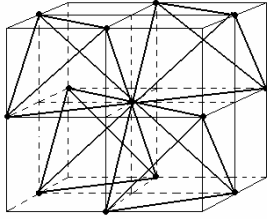


Рис. 4. Окрестность узла ажурной сетки

Реализация ажурной схемы. Аппроксимация и устойчивость

Численная схема строится на основе конечно-элементной аппроксимации вариационного уравнения (принципа виртуальных перемещений)

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dv = \int_V \rho (F_i - \ddot{u}_i) \delta u_i dv + \int_{S_p} P_i \delta u_i dS, \quad (1)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор перемещений; ε_{ij} – тензор деформаций; σ_{ij} – тензор напряжений; F и P – соответственно массовые и поверхностные нагрузки, ρ – плотность.

Распределение перемещений в элементах принимается линейным, деформации и напряжения считаются постоянными. Связь между напряжениями и деформациями в элементах устанавливается на основе закона Гука для упругих сред и теории пластического течения для упругопластических сред. Массы и объемы удаленных ячеек распределяются между соседними элементами. Для интегрирования уравнений по времени используется явная схема типа «крест». Анализ аппроксимации и устойчивости схемы приведен в [3]. На равномерных сетках базовая ажурная схема имеет второй порядок аппроксимации. Схема с расположением ячеек на рис. 4 имеет второй порядок точности только в случае равномерных ортогональных сеток и первый порядок в других случаях. Поэтому ее применение целесообразно только при расчетах тел прямоугольной формы (но выигрыш во времени счета при этом составляет около 30% по сравнению с базовой схемой). Схема является устойчивой при выполнении условия Куранта относительно минимального размера элемента:

$$\tau \leq \frac{\min(h_1, h_2, h_3, h_4, l_1, l_2, l_3)}{c}, \quad (2)$$

где τ – шаг интегрирования по времени, h_i ($i = 1,$

$2, 3, 4$) – высоты тетраэдра (элемента), l_i ($i = 1, 2, 3$) – расстояния между парами скрещивающихся ребер тетраэдра, c – скорость звука. Оценка (2) подтверждается расчетной практикой. При решении нелинейных задач берется коэффициент запаса в пределах 5%.

Тестирование и сравнительный анализ эффективности

Тестирование методики и программы проводилось на ряде упругих и упругопластических задач, охватывающих разные варианты сеток (равномерная, неравномерная блочно-регулярная) и граничных условий (заделка, свободная поверхность, поверхность под действием нормальной внешней нагрузки). Результаты получены на основе двух вариантов ажурной схемы – базовой (в одном внутреннем узле сходятся 8 элементов) и дополнительно прореженной (см. рис. 4, в одном внутреннем узле сходятся 4 элемента). Сравнение проводилось с аналитическими решениями, экспериментальными данными, численными решениями на основе других схем (схема Уилкинса [4], схема линейного четырехузлового трехмерного элемента) и решениями ANSYS.

Сравнение с ANSYS показало хорошее совпадение решений. По сравнению со схемой Уилкинса и традиционной схемой линейного четырехузлового конечного элемента (КЭ) ажурная схема показала более быструю сходимость. Все вычисления (кроме ANSYS) были выполнены с помощью разных вариантов одной программы, поэтому была возможность сравнить их по реальной эффективности (времени счета). По сравнению с базовым вариантом ажурной схемы время счета для схемы Уилкинса на 50% больше, а для схемы линейного элемента – в 6 раз больше. Вариант схемы с дополнительным удалением ячеек сокращает время счета еще на 30%.

Заключение

Представленные результаты разработки, программной реализации и тестирования явной ажурной схемы решения нестационарных задач теории упругости и пластичности позволяют сделать следующие выводы: 1) ажурная схема достаточно проста в реализации; 2) результаты решения тестовых задач продемонстрировали качества ажурной схемы – высокую скорость сходимости при измельчении сетки, лучшую точность по сравнению со схемами Уилкинса и линейного КЭ на одинаковых сетках; 3) сравнение численных решений на основе ажурной схемы с аналитическими

кими решениями и решениями на базе ANSYS показало хорошее совпадение результатов; 4) ажурная схема существенно эффективнее других аналогичных схем. При расчетах на одинаковой сетке и лучшей точности временные затраты ее в 1.5 раза меньше по сравнению со схемой Уилкинса и более чем в 6 раз по сравнению со схемой линейного конечного элемента.

Список литературы

1. Чекмарев Д.Т. Ажурные схемы метода конечного элемента // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. гос. ун-т. 1997. Вып. 55. С. 157–159.
2. Чекмарев Д.Т. Численные схемы метода конечного элемента на «ажурных» сетках // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 2. С. 49–54.
3. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. Н. Новгород: ННГУ, 2000. 118 с.
4. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С. 212–263.

RARE MESH SCHEME FOR SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL DYNAMIC PROBLEMS OF ELASTICITY AND PLASTICITY

A.V. Zhidkov, S.V. Zefirov, K.A. Kastalskaya, S.V. Spirin, D.T. Chekmarev

The article is dedicated to an explicit rare mesh scheme for the solution of three-dimensional geometrically and physically nonlinear non-stationary problems of elasticity and plasticity. The scheme is based on the linear four-node finite elements of tetrahedron form. The rare arrangement of the computational elements, covering the calculated area with regular intervals, allows reducing essentially calculation time, retaining the accuracy of the solution. Problems of realization of the scheme are discussed. Examples of solutions of test problems are given. The comparison of accuracy and efficiency of the numerical solutions with solutions using traditional schemes is given.

Keywords: explicit scheme, FEM, elasticity and plasticity theory, non-stationary problem.