УДК 539.3

КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ В КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСЗВУКОВОГО ИНТЕРВАЛА СКОРОСТИ ДВИЖЕНИЯ ШТАМПА

А.В. Звягин

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

zvsasha@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена задача трансзвукового движения штампа по границе упругого полупространства. Показано существование критической скорости движения, меньшей скорости продольных волн, но большей скорости поперечных волн, при переходе которой меняется характер деформаций и напряжений. Предложена физическая трактовка скорости, связанная с существованием сверхзвуковых поверхностных волн типа волн Рэлея.

Ключевые слова: упругость, контактная задача, штамп, критическая скорость.

Постановка задачи

Рассмотрим движение штампа при наличии сухого трения вдоль границы упругой полуплоскости. В неподвижной системе координат наблюдателя (x', o', y') плоскопараллельное движение упругой среды удовлетворяет волновым уравнениям для потенциалов продольных $\varphi(x', y', t')$ и поперечных $\psi(x, y, t)$ волн [1]. Вдоль границы упругого полупространства с постоянной скоростью движется жесткий штамп с заданным уравнением контура $y = f(x)$. В системе координат (xoy), связанной с движущимся телом (рис. 1), $x' = x - V_0 t$, $y' = y$, $t' = t$, движение будем считать установившимся. В этом случае производные потенциалов связаны уравнениями движения

$$(M_1^2 - 1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad (M_2^2 - 1)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$
$$M_1 = V_0/a, \quad M_2 = V_0/b, \qquad (1)$$

где $a = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $b = \sqrt{\mu/\rho}$ – соответственно скорость продольных и поперечных волн, ρ – плотность среды; λ, μ – упругие модули Ламе.

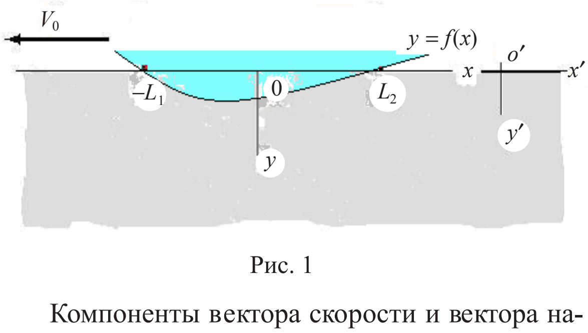

Рис. 1

Компоненты вектора скорости и вектора напряжений $\hat{\sigma}$ с использованием (1) можно представить выражениями

$$V_y = V_0\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right),$$
$$\frac{\sigma_{xy}}{\mu} = 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - (2 - M_2^2)\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \qquad (2)$$
$$\frac{\sigma_{yy}}{\mu} = -(2 - M_2^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}.$$

Для жесткого штампа с заданным уравнением контура $y = f(x)$ граничными условиями будут заданная вертикальная составляющая скорости среды и связь между компонентами вектора усилий – закон сухого трения Кулона – Амонтона: $V_y = V_0 f'(x)$, $\sigma_{xy}(x) = -k\sigma_{yy}(x)$. На остальной части границы вектор усилий равен нулю. Рассматривается случай движения тела штампа со скоростью, которая больше скорости поперечных волн, но меньше скорости продольных волн ($M_2 > 1$, $M_1 < 1$). В этом случае решение уравнений движения (1) представляется в виде

$$\varphi = \operatorname{Re}\Phi(x + i\alpha y), \quad \psi = \Psi(x - \beta y),$$
$$\alpha = \sqrt{1 - M_1^2}, \quad \beta = \sqrt{M_2^2 - 1}. \qquad (3)$$

Из (3) и граничных условий следует, что функция $\Phi''(z)$ является решением краевой задачи Римана – Гильберта

$$A(x)\operatorname{Re}\Phi''(x) + B(x)\operatorname{Im}\Phi''(x) = g(x),$$
$$A(x) = \begin{cases} k(2 - M_2^2), & \text{если } |x| \le L, \\ (2 - M_2^2)^2, & \text{если } |x| > L, \end{cases}$$
$$B(x) = \begin{cases} \alpha(M_2^2 + 2\beta k), & \text{если } |x| \le L, \\ 4\alpha\beta, & \text{если } |x| > L, \end{cases} \qquad (4)$$
$$g(x) = \begin{cases} (2 - M_2^2 - \beta k) f'(x), & \text{если } |x| \le L, \\ 0, & \text{если } |x| > L. \end{cases}$$

Отметим, что все коэффициенты в левой части положительны, за исключением одного $k(2-M_2^2)$, знак которого определяется скоростью движения.

Решение задачи и основные результаты

Решение задачи (4) находится методами ТФКП – сведением к задаче Дирихле [6]. Для окончательного построения решения следует определить место схода среды с поверхности штампа. Для определения данного параметра задачи используется условие равенства нулю давления в точке отрыва среды от поверхности тела. Для выпуклого штампа с контуром $f(x) = -\lambda(x-c)^2$, где параметр c характеризует сдвиг параболы в выбранной системе координат, используя безразмерный параметр $c^* = c/L$, можно значение давления под штампом $p/(2\lambda L)$ выразить как функцию безразмерной координаты $\xi = x/L$:

$$\frac{p(\xi)}{2\lambda L} = 2\beta(c^*-\xi) + K_2\frac{c^*-\xi}{\sin(m\pi)} + \\ +[K_1(c^*-\xi) - K_2 M]\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)^m, \quad (5)$$

$$1)\ M_2^2 < 2, \quad m = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{4\alpha\beta}{(2-M_2^2)^2};$$

$$2)\ M_2^2 > 2, \quad m = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{4\alpha\beta}{(2-M_2^2)^2};$$

$$M = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^m dt, \quad c^* = \frac{c}{L},$$

$$K_1 = \frac{k(2-M_2^2)^2 - 2\alpha^2\beta(M_2^2+2\beta k)}{k^2(2-M_2^2)^2 + \alpha^2(M_2^2+2\beta k)^2}(2-M_2^2-\beta k),$$

$$K_2 = \frac{\alpha M_2^2(2-M_2^2)(2-M_2^2-\beta k)}{k^2(2-M_2^2)^2+\alpha^2(M_2^2+2\beta k)^2}.$$

На рис. 2 представлены графики зависимости давления от координаты для двух значений скорости. Кривая *1* соответствует движению со скоростью, равной $V_0 = 1.2b < \sqrt{2b}$, $k = 0$, при этом параметр $c^* = 0.8326$. Кривая *2* соответствует распределению давления для скорости $V_0 = 1.45b > \sqrt{2b}$, $c^* = 1$. Для выяснения физической природы критической скорости рассмотрены поверхностные волны в условиях стесненной деформации со следующими граничными условиями: $y = 0$, $u_y = 0$, $\sigma_{xy} + f\sigma_{yy} = 0$. Решение уравнений (1), удовлетворяющее условиям излучения на бесконечности, приводит к однородной системе уравнений. Условие существования ненулевого решения позволяет найти скорость таких волн и условие их существования $C = \sqrt{2b}$, $f = 1$.

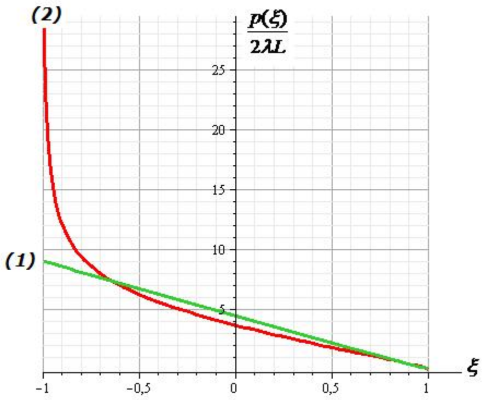

Рис. 2

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-024-00396_а.

Список литературы

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.

2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 302 с.

3. Rosakis A.J., Samudrala O., Coker D. Cracks faster than the shear wave speed // Science. 1999. V. 284. 1999. P. 1337–1340. www.sciencemag.org

4. Brener E.A., Malinin S.V., Marchenko V.I. Fracture and Friction: Stick-Slip Motion. // arXiv: cond – mat/ 0411481 V. 1. 2004. P. 1–12.

5. Su Hao, Wing Kam Liu, Klein P.A., Rosakis A.J. Modeling and simulation of intersonic crack growth // Intern. J. of Solids and Structures. 2003. P. 1–27.

6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

A CRITICAL VELOCITY IN THE CONTACT PROBLEM OF ELASTICITY FOR INTERSONIC SPEED REGIME OF THE PUNCH MOVEMENT

A.V. Zvyagin

The problem of intersonic movement of a punch along the boundary of an elastic half-space is considered. The existence of a critical velocity which is lower than the velocity of longitudinal waves but higher than the velocity of transverse waves is shown. The nature of stress and strain changes when passing through this velocity. A physical interpretation of the velocity is associated with the existence of supersonic surface waves of Rayleigh type.

Keywords: elasticity, contact problem, stamp, critical velocity.