

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОГО ТЕЛА СО СЛОИСТЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЛОСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

© 2011 г.

К.М. Зингерман

Тверской госуниверситет

zingerman@rambler.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется статическое напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного нелинейно-упругого тела с упругим включением при конечных плоских деформациях. Считается, что включение состоит из двух концентрических слоев: внутренней круговой области и внешней области в форме кругового кольца, механические свойства которых различны. Задача формулируется в координатах недеформированного состояния. При решении используются приближенные аналитические методы: метод возмущений, метод Колосова–Мухелишвили. Приводятся некоторые результаты расчетов.

Ключевые слова: концентрация напряжений, конечные деформации, слоистое упругое включение, плоская задача, приближенные аналитические методы.

Введение

В современной механике композитов получила распространение концепция межфазного слоя – области вокруг частицы наполнителя, механические свойства которой существенно отличаются как от свойств наполнителя, так и от свойств матрицы [1–5]. Представляют интерес расчеты напряженно-деформированного состояния композита при наличии этого слоя. Рассмотрены модельные плоские задачи нелинейной теории упругости, решение которых позволяет анализировать влияние межфазного слоя при конечных деформациях.

Постановка задачи

Исследуется статическое напряженно-деформированное состояние бесконечно протяженного упругого тела (матрицы), в котором имеется круговая область с другими свойствами (включение). Эта область состоит из двух частей, ограниченных в недеформированном состоянии концентрическими окружностями – внутренней круговой области и внешней части в форме кругового кольца (межфазного слоя). Задача рассматривается при конечных плоских деформациях. Материалы матрицы, внутренней части включения и межфазного слоя считаются сжимаемыми, их механические свойства описываются двухконстантным упругим потенциалом – частным случаем потенциала Мурнагана [6]. Считается, что

на границах межфазного слоя с матрицей и внутренней частью включения выполнены условия идеального контакта – условия непрерывности вектора перемещений и вектора нормальных истинных напряжений.

Математическая постановка задачи записывается в координатах недеформированного состояния и включает [6] уравнение равновесия

$$\overset{0}{\nabla} \cdot \left[\overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right] = 0 \quad (1)$$

определяющее соотношение

$$\overset{0}{\Sigma} = \lambda \left(\overset{0}{E} \cdot I \right) I + 2G \overset{0}{E}, \quad (2)$$

кинематические соотношения

$$\overset{0}{E} = \frac{1}{2} (\Psi \cdot \Psi^T - I), \quad \Psi = I + \overset{0}{\nabla} u. \quad (3)$$

В соотношении (2) $\lambda = \lambda_i$, $G = G_i$ в области S_i ($i = 0, 1, 2$). Здесь S_0 – внутренняя часть включения, S_1 – его внешняя часть (межфазный слой), S_2 – область, занятая матрицей. В формулах (1)–(3) $\overset{0}{\Sigma}$ – тензор напряжений Пиолы–Кирхгофа второго рода, $\overset{0}{E}$ – тензор деформаций Грина, Ψ – аффинор деформаций, u – вектор перемещений, I – единичный тензор.

Граничные условия могут быть записаны в виде

$$[u]_{\Gamma_i} = 0, \quad \left[N \cdot \overset{0}{\Sigma} \cdot \Psi \right]_{\Gamma_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

где Γ_1 – граница между слоями включения, Γ_2 –

граница между матрицей и внешним слоем включения в недеформированном состоянии, N – нормаль к соответствующей границе, квадратные скобки означают приращение соответствующей величины при переходе через границу в направлении нормали. Задаются также условие на бесконечности $\Sigma|_{\infty} = \Sigma^{\infty}$.

Метод решения задачи и результаты расчетов

Для решения задачи применяется метод возмущений [6–9]. Решение линеаризованной задачи для каждого приближения определяется методом Колосова–Мухелишвили [10] с использованием алгоритмов, изложенных в [7–9]. Комплексные потенциалы для каждого приближения в каждой области находятся в виде отрезков рядов Лорана. Вычислены первые два приближения. Расчеты выполнены с использованием системы Maple.

На рис. 1 приведены результаты расчетов для случая $\lambda_2/G_2 = 2$, $G_1/G_2 = 5$, $\lambda_1/G_2 = 8$, $G_0/G_2 = 25$, $\lambda_0/G_2 = 30$ при одноосном растяжении на бесконечности: $\Sigma_{11}^{\infty} = p$, $\Sigma_{22}^{\infty} = \Sigma_{12}^{\infty} = 0$, $p/G_2 = 0.2$. Дано распределение напряжения Σ_{11} вдоль оси x для двух значений R_2/R_1 : *a* – для $R_2/R_1 = 2$, *б* – для $R_2/R_1 = 1.2$. Здесь R_1 и R_2 – радиусы внутреннего

и внешнего слоев включения соответственно.

Красная линия соответствует линейному решению, зеленая – решению с учетом нелинейных эффектов. Можно видеть, что поправка от учета нелинейности достигает 30%.

Список литературы

1. Яновский Ю.Г., Образцов И.Ф. // Физическая мезомеханика. 1998. Т. 1. С. 135–142.
2. Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э. // Физическая мезомеханика. 2001. Т. 4, №3. С. 63–71.
3. Bertoldi K., Bigoni D., Drugan W.J. // J. Mech. Phys. Solids. 2007. V. 55. P. 1–34.
4. Bigoni D., Movchan A.B. // Int. J. Solids Struct. 2002. V. 39. P. 4843–4865.
5. Vasiliev A.A., Miroshnichenko A.E., Ruzzene M. // Mech. Res. Comm. 2010. V. 37. P. 225–229.
6. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
7. Зингерман К.М., Левин В.А. // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, вып. 6. С. 983–1001.
8. Левин В.А., Калинин В.В., Зингерман К.М., Вершинин А.В. Развитие дефектов при конечных деформациях. Компьютерное и физическое моделирование. М.: Физматлит, 2007. 392 с.
9. Levin V.A., Zingerman K.M. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1998. V. 65, No 2. P. 431–435.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

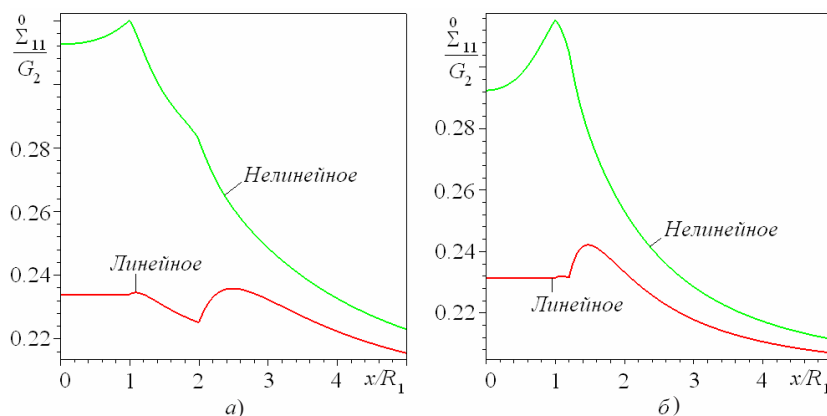


Рис. 1

STRESS ANALYSIS OF A NONLINEAR-ELASTIC SOLID WITH A LAMINAR INCLUSION UNDER FINITE PLANE STRAINS

K.M. Zingerman

Static stress analysis of an infinite nonlinear-elastic solid with an elastic inclusion is performed for the case of finite plane strains. It is assumed that the inclusion consists of two layers with different mechanical properties. These layers are the intrinsic circular region and the external region which assumes the shape of a circular ring. The problem is formulated and solved in the coordinates of a non-deformed state. Approximate analytical methods are used for the solution: the perturbation technique and the Kolosov–Muskhelishvili method. Some computational results are presented.

Keywords: stress concentration, finite strains, layered elastic inclusion, plane problem, approximate analytical technique.