УДК 539.3

КРУЧЕНИЕ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩЕГО СФЕРИЧЕСКУЮ ТРЕЩИНУ

© 2011 г.

А.Н. Златин

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

anzlat@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлено элементарное решение парных сумматорных уравнений, связанных с осесимметричной задачей кручения упругого пространства, ослабленного сферической трещиной.

Ключевые слова: парные уравнения, кручение, упругое пространство, сферическая трещина.

Парные уравнения, связанные с осесимметричной задачей кручения упругого пространства, ослабленного сферической трещиной, рассматривались в работах [1–3]. В [1] решение сводилось к интегродифференциальному уравнению, в [2] и [3] – к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, причем в [3] (см. поправку [4]) было найдено решение этого уравнения.

Постановка задачи. Парные сумматорные уравнения

Рассмотрим задачу осесимметричного кручения упругого пространства, ослабленного трещиной в виде сферического сегмента: $r = 1$; $0 \le \theta < \theta_0$, где $\{r, \varphi, \theta\}$ – сферические координаты. К трещине приложены касательные напряжения

$$\tau = \tau_{r\varphi} = Gr(u/r)'_r = F\cos\theta,$$

на бесконечности и в нуле перемещения $u = u_\varphi = 0$ (G – модуль сдвига упругого материала). Условия сопряжения решений на поверхности $r = 1$, где расположена трещина, имеют вид ($x = \cos\theta$):

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \text{при} \quad \theta_0 < \theta \le \pi;$$
$$\tau_1 = \tau_2 = F(x) \quad \text{при} \quad 0 \le \theta < \theta_0 \qquad (1)$$
$$u_1 = u_2 \quad \text{при} \quad \theta_0 < \theta \le \pi.$$

Индексом 1 помечены величины, относящиеся к области $r < 1$, индексом 2 – к области $r > 1$.

Решения уравнения кручения, могут быть построены в виде

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{n+2}{n(n+1)} r^n P_n^1(x);$$
$$u_2 = -\sum_{n=2}^{\infty} C_n \frac{n-1}{n(n+1)} r^{-n-1} P_n^1(x). \qquad (2)$$

При выполнении смешанных условий (2) приходим к парным сумматорным уравнениям по присоединенным функциям Лежандра ($N_n^1 = n(n+1)/(n+1/2)$):

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} C_n P_n^1(x) = F(x) \quad \text{при} \quad 0 \le \theta < \theta_0;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N_n^1} C_n P_n^1(x) = 0 \quad \text{при} \; \theta_0 < \theta \le \pi. \qquad (3)$$

Решение парных уравнений

Для упрощения решения предположим, что нагрузка представима в виде

$$F(x) = G\sum_{n=1}^{\infty} F_n P_n^1(x).$$

Использование специальных дифференциальных операторов позволяет свести систему (3) к паре уравнений по полиномам Лежандра, допускающей элементарное решение. Приведем окончательный результат:

$$C_0 = \int_0^{\theta_0} g(t)\cos\frac{t}{2}\,dt = 0, \qquad (4)$$

$$C_n = \int_0^{\theta_0} g(t)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (5)$$

Вспомогательная функция $g(t)$ в (4) и (5) после применения стандартной процедуры метода парных уравнений находится в явном виде:

$$\frac{\pi}{2} g(t) = C\cos\frac{3}{2}t - F_1\frac{2}{3}t\sin\frac{3t}{2} +$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} F_n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t, \qquad (6)$$

причем константа C определяется из интегрального соотношения (4).

Частные случаи

I. Задача о скручивании бесконечного пространства со свободной от напряжений трещиной усилиями, приложенными на бесконечности сводится к случаю: $F_1 = 0$, $F_n = 0$, $n \geq 3$, $F_2 = -\gamma/3$ (γ – погонный угол закручивания). Из (4), (6) получаем:

$$g(t) = \gamma\left((4\cos\theta_0 - 1)\cos\frac{3}{2}t - 3\cos\frac{5}{2}t\right)/(3\pi).$$

Коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{\mathrm{III}} = \frac{G\sqrt{\pi}g(\theta_0)}{\sqrt{\sin\theta_0}} = \frac{4G\gamma\sin^{3/2}(\theta_0)\cos(\theta_0/2)}{3\sqrt{\pi}}$$

(отметим, что этот результат совпадает с приведенным в [4]). Для сравнения рассмотрим задачу кручения пространства с дискообразной трещиной, совпадающей в плане со сферической. В этом случае $K_{\mathrm{III}} = K_{\text{пл}} = 4G\gamma\sin^{3/2}(\theta_0)/(3\sqrt{\pi})$.

Коэффициент уменьшения K_{III} за счет кривизны поверхности: $k(\theta_0) = K_{\mathrm{III}}/K_{\text{пл}} = \cos(\theta_0/2)$.

II. Сосредоточенный момент M в начале координат. Эта задача приводится с случаю $F_1 = -3M/(8\pi G)$, $F_n = 0$, при $n \geq 2$. Коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{\mathrm{III}} = M\left(\frac{3}{2}\left(\frac{\theta_0}{\sin\theta_0} - \cos\theta_0\right) + \sin^2\theta_0\right)/(4\pi^{3/2} \times \cos(\theta_0/2)\sqrt{\sin\theta_0}).$$

Список литературы

1. Мартыненко М.А. // Математическая физика. 1979. №25. С. 106–109.
2. Златин А.Н., Галактионова Н.Е., Дорофеев П.А. // Вопросы математической физики и прикладной математики. Физико-технический институт им А.Ф. Иоффе, СПб. 2007. С. 279–285.
3. Godin Yu.A. // Quart. Appl. Math. 1995. V. 53. P. 679–682.
4. Godin Yu.A. // Quart. Appl. Math. 2000. V. 58. P. 795–796.

TORSION OF AN ELASTIC SPACE CONTAINING A SPHERICAL CRACK

A.N. Zlatin

The elementary solution of dual series equations arising in the problem of axisymmetric torsion of an elastic space weakened by a spherical crack is obtained.

Keywords: dual series equations, torsion, elastic space, spherical crack.