УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С СОПРЯЖЕННЫМИ ПОЛЯМИ

Л.А. Игумнов

НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматриваются два подхода редукции трехмерных краевых динамических связанных задач теории вязкоупругости к граничным интегральным уравнениям. Представлены варианты гранично-элементных схем решения этих уравнений. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: матрица Неймана, трехмерная постановка, анизотропная упругость, электроупругость, численное моделирование.

Рассматриваются новые схемы решения связанных краевых задач линейной трехмерной динамической теории вязкоупругости при условии взаимодействия механических и немеханических полей [1]. Вязкоупругие свойства материала описываются в рамках моделей Кельвина–Фойгта и стандартного тела, а также слабосингулярного наследственного ядра Абеля. Модели взаимодействия соответствуют теориям пороупругости, термоупругости и электроупругости. Для описания пороупругих свойств использованы следующие модели Био: полная, упрощенная, несжимаемого материала. Задачи поро- и термоупругости рассматриваются в полной строгой математической постановке для изотропного и анизотропного случаев. При рассмотрении задач электроупругости особое внимание уделено построению статических матриц Грина и Неймана. В связи с этим для анизотропной теории упругости и для электроупругости представлены два способа математического построения и компьютерного моделирования этих матриц. Приведена их визуализация в виде поверхностей. Так, на рис. 1 представлены соответствующие поверхности для компоненты 1-1 анизотропной матрицы Грина в случае графитоэпоксидного моноклинического материала, на рис. 2 – для компоненты 1-1 электроупругой матрицы Неймана в случае трансверсально изотропной пьезокерамики (PZT-4).

В качестве метода решения трехмерных краевых задач развиваются граничные интегральные уравнения (ГИУ). Представлены две схемы построения ГИУ: классическая и неклассическая. Классическая схема основана на использовании формулы Грина–Бетти–Сомильяны и приводит к сингулярным ГИУ. Формула интегрального представления искомого решения, записанная для областей V и $R^3 \setminus (V \bigcup \Gamma)$, $\Gamma = \partial V$, имеет вид:

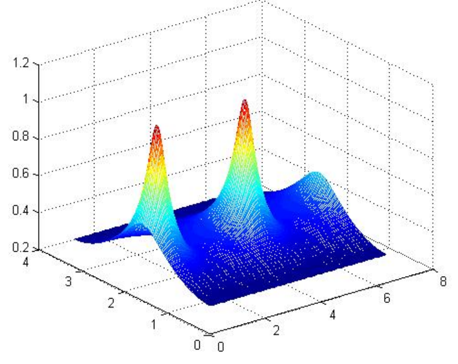

Рис. 1

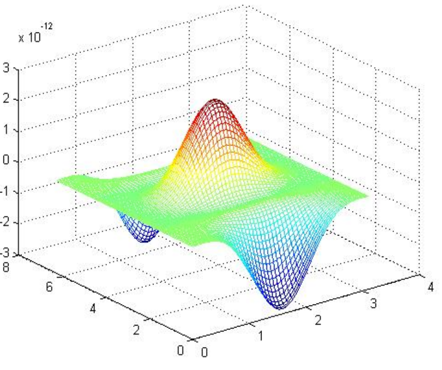

Рис. 2

$$u(x) = \pm\left(\int_\Gamma l^1 U(y,x) l^0 u(y) d_y \Gamma - \right.$$

$$\left. - \int_\Gamma l^0 U(y,x) l^1 u(y) d_y \Gamma \right), \quad x \in V,$$

где l^0, l^1 – операторы граничных условий первого и второго рода соответственно; $U(y, x)$ – матрица фундаментального решения; $u(x)$ – искомый вектор-решение.

Отмечены причины ошибок, допущенных в научной литературе [2], в получении сингулярных ГИУ изотропной пороупругости. На конкретных примерах демонстрируется существенность допущенных ошибок. Представлены сингулярные ГИУ для решения задач рассеяния термоупругих волн на тонком экране. Неклассическая схема следует из подхода В.А. Бабешко [3–5] и приводит к регулярным ГИУ. Для динамических задач справедливы уравнения:

$$A_\alpha \otimes A_\alpha \int_\Gamma [l^1 e^{ik_\alpha n(x-y)} l^0 u(y) -$$

$$- e^{ik_\alpha n(x-y)} l^1 u(y)] d_y \Gamma = 0, \quad x \in \Gamma,$$

где $|n| = 1$, A_α, k_α – собственные векторы и числа исходных операторов.

Для анизотропных моделей такие регулярные ГИУ являются точными в отличие от всех других существующих схем редукции построения ГИУ для решения динамических задач трехмерной теории вязкоупругости с сопряженными полями. В качестве решения ГИУ используется метод граничных элементов. Используются регуляризованные ГИУ, согласованная поэлементная ап-проксимация, адаптивное численное интегрирование в сочетании с алгоритмом понижения особенности. Гранично-элементные схемы созданы на основе нового (шагового) метода численного обращения преобразования Лапласа и модификаций методов Дурбина, квадратур сверток. Для численного решения задач разработано соответствующее программное обеспечение. Приведены результаты численных экспериментов. Так, численно исследовано влияние на динамику отклика порового давления величины коэффициента проницаемости. Для этих целей рассмотрена задача о скачке единичной поверхностной силы (Н/м^2) на торце призматического пороупругого тела. Сравнение отклика порового давления p для модели Био несжимаемого пороупругого материала с соответствующим откликом для полной модели Био приведено на рис. 3, 4. Параметры материала для модели Био, записанной для четырех искомых функций, выбраны следующие:

$$E = 1.44 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2;\ \nu = 0;\ \rho = 2458 \text{ кг/м}^3;$$

$$\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3;\ \phi = 0.19;\ R = 4.7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2;$$

$$\alpha = 0.86;\ \kappa = 1.9 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4\text{/Н·с}.$$

На рисунках цифрами обозначены кривые: *1* – модель Био несжимаемого пороупругого материала, *2* – $\kappa = 1.9 \cdot 10^{-10}$, *3* – $\kappa = 1.9 \cdot 10^{-8}$, *4* – $\kappa = 1.9 \cdot 10^{-6}$. Результаты численного моделирования для полной среды Био демонстрируют факт выхода отклика порового давления с ростом проницаемости на отклик порового давления, сопоставимого с откликом для несжимаемого пороупругого материала.

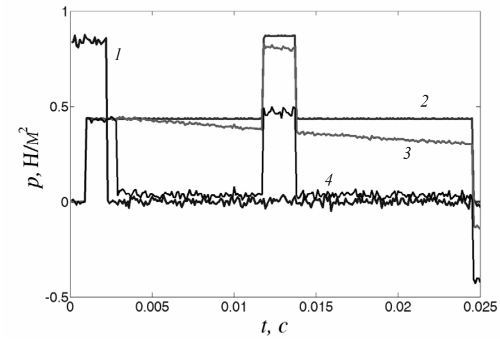

Рис. 3

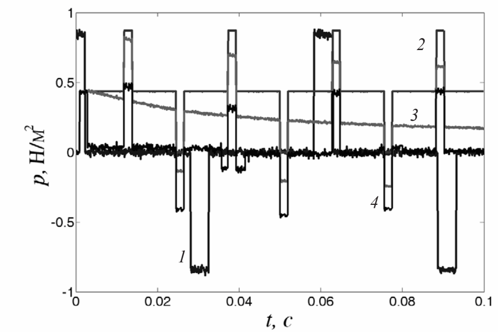

Рис. 4

Кроме того, представлены результаты гранично-элементного моделирования поверхностных волн; численно исследовано влияние эффекта перехода свойств пороупругого материала из сжимаемого состояния в несжимаемое на динамику отклика перемещений.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №2222), при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а) и по гранту Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.

Список литературы

1. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

2. Schanz M. Wave Propogation in Viscoelastic and Poroelastic Continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

3. Бабешко В.А. // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, №1. С. 73–76.

4. Ватульян А.О. // Докл. РАН. 1993. Т. 333, №3. С. 312–314.

5. Игумнов Л.А. // Докл. РАН. 2006. Т. 409, №5. С. 1–3.

BOUNDARY-ELEMENT MODELING OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF 3D DYNAMIC VISCOELASTICITY WITH CONJUGATE FIELDS

L.A. Igumnov

Two approaches of reducing 3D dynamic conjugate boundary-value problems of viscoelasticity to boundary integral equations. Variants of boundary element schemes for solving these equations are presented. The results of numerical modeling are given.

Keywords: Neuman's matrix, 3D formulation, anisotropic elasticity, electric elasticity, numerical modeling.