

УДК 539.3

ПРОДОЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ ИЗ МАТЕРИАЛА С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА

© 2011 г.

В.В. Кажяев¹, Н.П. Семерикова²

¹Нижегородский филиал Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

²Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

erf04@sinn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

В последнее время большой интерес проявляется к материалам, обладающим нестандартными реакциями на различные виды деформаций. Так, существуют материалы, которые при растяжении в длину увеличиваются в поперечных размерах. Такие материалы в иностранной литературе называют Auxetic. Аномальное поведение связано с измененной внутренней структурой материала, что приводит к возникновению таких свойств, как анизотропия, отсутствие центральной симметрии, появление вращательных степеней свободы и т.д. С точки зрения теории упругости нестандартное поведение материалов связано с отрицательными значениями коэффициента Пуассона. Цель настоящего исследования – изучение влияния отрицательного коэффициента Пуассона на распространение продольных волн в стержнях.

Ключевые слова: волна, стержень, отрицательный коэффициент Пуассона.

Особенность материалов Auxetic заключается в том, что их поведение при деформации не согласуется с общепринятыми стандартами. С точки зрения теории упругости отношение изменения поперечных размеров тела (ширины) к изменению его продольных размеров (длины) при одноосном растяжении характеризуется коэффициентом Пуассона. В классической теории упругости большинство материалов имеют коэффициент Пуассона $0 \leq \nu \leq 0.3$. Однако для новых материалов, демонстрирующих аномальное поведение, коэффициент Пуассона принимает отрицательные значения и может по модулю в два раза превосходить принятые положительные значения. Отрицательный коэффициент Пуассона встречается, в основном, в специально синтезируемых искусственных материалах, к числу которых относятся полимеры, полиэтилен, керамика, композиционные материалы, слоистые структуры.

В настоящей работе проводится исследование влияния отрицательного коэффициента Пуассона на свойства продольных волн в стержне. Рассматривается модель стержня Бишопа, учитывающая кинетическую энергию поперечных движений частиц стержня и потенциальную энергию сдвиговых деформаций. С учетом геометрической и физической нелинейности уравнение продольных волн в стержне имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left(1 + \frac{6\alpha}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -$$

$$- \nu^2 r^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + c_\tau^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – продольное перемещение, E – модуль Юнга стержня, μ – модуль сдвига, ρ – плотность, ν – коэффициент Пуассона, r – полярный радиус инерции, $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ – скорость продольных волн в стержне, $c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорость сдвиговых волн в среде. Коэффициент α , определяющий вклад геометрической и физической нелинейностей, имеет вид

$$\alpha = \frac{E}{2} + \frac{\nu_1}{6}(1 - 6\nu) + \nu_2(1 - 2\nu) + \frac{4}{3}\nu_3,$$

где $\nu_{1,2,3}$ – константы упругости третьего порядка.

Линейные продольные волны в стержне обладают дисперсией, так как их фазовые скорости зависят от частоты. На малых частотах фазовые скорости волн близки к стержневой скорости c_0 , а на больших частотах продольные волны распространяются со скоростями, близкими к скорости сдвиговых волн c_τ . Для обычных материалов (при положительных значениях коэффициента Пуассона) $c_0 > c_\tau$ и дисперсия продольных волн является нормальной. В материалах с отрицательным коэффициентом Пуассона дисперсия имеет нормальный характер, если $-0.5 < \nu < 0$. При $\nu = -0.5$ продольные волны распространяются в стержне, как в среде без дисперсии. При $-1 < \nu < -0.5$ изменяется соотношение между характерными скоростями, а именно скорость сдвиговых волн c_τ пре-

восходит стержневую скорость c_0 . Таким образом, в стержнях из материалов Auxetic отрицательный коэффициент Пуассона приводит к качественно иному (аномальному) дисперсионному поведению линейных волн.

На распространение продольных волн в стержне, описываемых уравнением (1), влияют два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в волне новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия же, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Взаимодействие этих факторов приводит к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы. Стационарные волны деформации $U(\xi) = \partial u / \partial \xi$, где $\xi = x - Vt$ – «бегущая» координата, $V = \text{const}$ – скорость стационарной волны, описываются уравнением ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью, решения которого приведены в [1].

Найдены решения, описывающие периодические волны деформации. Эти волны распространяются с такими же скоростями, что и линейные волны. Аналитически они выражаются через эллиптические функции Якоби в виде:

$$U(\xi) = \pm \frac{A}{3s^2} (1 + s^2 - \sqrt{1 - s^2 + s^4}) \mp A \text{sn}^2(k\xi, s). \quad (2)$$

Здесь A – амплитуда волны, k – волновое число, s – модуль эллиптической функции, определяющий

степень искажения формы волны $U(\xi)$ по сравнению с синусоидальной ($0 < s < 1$). Верхний знак в формуле (2) соответствует случаю, когда коэффициент Пуассона $\nu \in (-0.5; 0)$, а нижний знак – случаю $\nu \in (-1; -0.5)$. Для периодических волн получена зависимость их скорости от волнового числа. Эта зависимость имеет название нелинейного дисперсионного соотношения:

$$V = \sqrt{\frac{C_0^2 + C_\tau^2 \nu^2 r^2 \sqrt{1 - s^2 + s^4} k^2}{1 + \nu^2 r^2 \sqrt{1 - s^2 + s^4} k^2}}. \quad (3)$$

В частности, при $s = 0$ выражение (3) совпадает с законом дисперсии для линейных волн.

В диапазоне скоростей, где нет линейных волн, в нелинейном случае существуют уединенные солитоноподобные волны колоколообразной формы:

$$U(\xi) = A^* / \text{ch}^2\left(\frac{x - Vt}{\Delta}\right), \quad (4)$$

где A^* – амплитуда; Δ – ширина солитона. Для солитонов получены связи между их параметрами – амплитудой, шириной, скоростью и проанализированы их свойства в зависимости от значения коэффициента Пуассона.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-08-00188.

Список литературы

1. Ерофеев В.И., Кажяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. М.: Физматлит, 2002. 208 с.

LONGITUDINAL WAVES IN THE ROD OF A MATERIAL WITH A NEGATIVE POISSON'S RATIO

V.V. Kazhaev, N.P. Semerikova

Recently, there has been great interest in materials having nonstandard reactions to various kinds of deformation. Thus, there are materials that, being expended in length, increase in transverse dimensions. In foreign literature, such materials are called Auxetic. Anomalous behavior is associated with the altered internal structure of the material that gives rise to the properties such as anisotropy, the absence of central symmetry, the appearance of rotational degrees of freedom, etc. From the point of view of the theory of elasticity, such non-standard behavior of materials is associated with negative Poisson's ratio. The aim of this paper is to study the effect of a negative Poisson's ratio on the propagation of longitudinal waves in rods.

Keywords: wave, rod, negative coefficient Poisson.