УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ ПРИ НЕРАВНОМЕРНОМ ПО УГЛОВОЙ КООРДИНАТЕ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ

А.Н. Андреев

Кемеровский госуниверситет

algebra@kemsu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложена расчетная методика определения критических параметров устойчивости слоистой композитной оболочки вращения, нагруженной неравномерно распределенным внешним давлением. Приведены результаты исследований устойчивости конической оболочки.

Ключевые слова: оболочка вращения, устойчивость, неравномерное внешнее давление, расчетная методика.

1. Определение основного состояния оболочки

Основное состояние оболочки определяем на основе линеаризованных дифференциальных уравнений изгиба многослойной оболочки, несущей поперечную нагрузку [1]

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\lambda^\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\lambda} = 0, \qquad (1)$$

$$b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} = q_n(s,\varphi), \quad \nabla_\alpha S^{\alpha\beta} - Q^\beta = 0.$$

Здесь ∇_α – символ ковариантного дифференцирования, $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\lambda}$, … – усилия и моменты в отсчетной поверхности оболочки, s, φ – соответственно меридиональная и угловая координаты. Уравнения (1), дополненные соотношениями упругости, деформации–перемещения, связи между усилиями и моментами в отсчетной поверхности оболочки и внутренними напряжениями в ее слоях составляют систему пяти дифференциальных уравнений двенадцатого порядка [1] относительно пяти обобщенных перемещений w, u_s, u_φ, π_s, π_φ. Эта система должна интегрироваться при соответствующих краевых условиях. В рассмотренном ниже случае жесткого защемления краев эти условия заключаются в 2π-периодичности решения по угловой координате и в обращении в нуль обобщенных перемещений на торцах оболочки:

$$\text{при} \quad s = 0, l \quad w = \frac{\partial w}{\partial s} = u_s = u_\varphi = \pi_s = \pi_\varphi = 0. \qquad (2)$$

Интенсивность $q_n(s,\varphi)$ внешнего давления зададим формулой

$$q_n(s,\varphi) = P \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(s) \exp(in\varphi), \qquad (3)$$

где P = const – параметр интенсивности давления. Введя 12-мерный вектор $\mathbf{y}$ безразмерных кинематических и силовых параметров напряженно-деформированного состояния оболочки [1], запишем уравнения ее изгиба и соответствующие им краевые условия в матричной форме ($x = s/l$)

$$\mathbf{A}(x, \partial/\partial\varphi)\partial\mathbf{y}/\partial x = \mathbf{B}(x, \partial/\partial\varphi)\mathbf{y} + \mathbf{f}(x,\varphi), \qquad (4)$$

$$\mathbf{My}(0,\varphi) = \mathbf{Ny}(1,\varphi) = \mathbf{0}. \qquad (5)$$

Решение задачи (4), (5) строим в виде

$$\mathbf{y}(x,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{y}_n(x) \exp(in\varphi), \qquad (6)$$

позволяющем удовлетворить условию 2π-периодичности по угловой координате. Подстановка (6) в (4), (5) и отделение угловой координаты приводит к распадающимся по индексу n линейным краевым задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате численного решения этих краевых задачи с применением метода инвариантного погружения [1] определялись коэффициенты $\mathbf{y}_n(x)$ разложений (6), а вместе с ними и характеристики основного напряженно-деформированного состояния оболочки.

2. Определение критических интенсивностей давления и соответствующих им форм потери устойчивости

В основу анализа устойчивости оболочки положим неклассические уравнения [1]:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\lambda^\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\lambda} = 0,$$

$$b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + \nabla_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} -$$

$$-\nabla_\alpha(\widetilde{T}^{\alpha\beta}\eta_\beta)-\nabla_\alpha(T^{\alpha\phi}\widetilde{\eta}_\beta)=0,$$

$$\nabla_\alpha S^{\alpha\beta}-Q^\beta=0, \qquad (7)$$

в которых $\widetilde{T}^{\alpha\beta},\widetilde{\eta}_\alpha$ – усилия и углы поворота основного состояния. Уравнения (7), дополненные соотношениями упругости, вариации деформаций – вариации перемещения, связи между вариациями усилий и моментов в отсчетной поверхности оболочки и вариациями внутренних напряжений в ее слоях составляют систему пяти дифференциальных уравнений двенадцатого порядка [1] относительно вариаций пяти обобщенных перемещений w, u_s, u_φ, π_s, π_φ. Подставляя характеристики основного напряженно-деформированного состояния в уравнения устойчивости (7), приходим к линейной краевой задаче на собственные значения для системы дифференциальных уравнений с частными производными, которую запишем в матричной форме $(\lambda = P/E_c^1)$

$$\mathbf{A}(x,\partial/\partial\varphi)\,\partial\mathbf{y}/\partial x =$$
$$=\mathbf{B}(x,\partial/\partial\varphi)\mathbf{y}+\lambda\mathbf{C}(x,\partial/\partial\varphi)\mathbf{y}, \qquad (8)$$

$$\mathbf{My}(0,\varphi)=\mathbf{Ny}(1,\varphi)=\mathbf{0}. \qquad (9)$$

Решение этой задачи также строится в форме (6) тригонометрических рядов Фурье по угловой координате. Подстановка этих рядов в (8), (9) и отделение угловой координаты приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, не распадающейся по индексу суммирования n на независимые конечномерные системы, причем эта ситуация сохраняется даже в том случае, когда ряд (3), задающий распределение интенсивности внешнего давления, сводится к конечной сумме. Для этого случая нагружения сформулирован алгоритм выделения конечномерной подсистемы. Получившаяся конечномерная краевая задача сведена к равносильной ей задаче определения характеристических чисел и собственных векторов системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода и решена численно с использованием метода Бубнова–Галеркина в сочетании с обобщенной формой метода инвариантного погружения. Рассмотрена задача устойчивости жестко защемленной усеченной конической армированной оболочки, несущей поперечную нагрузку, распределенную по закону

$$q_n(x,\varphi)=P(1+\varepsilon\cos N\varphi).$$

В расчетах использовалась структурная модель армированного слоя [1]. Выполнен параметрический анализ полученных решений. Даны численные оценки влияния поперечных сдвигов и моментности основного состояния на критические интенсивности внешнего давления.

Список литературы

1. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.

STABILITY OF A MULTILAYERED COMPOSITE ORTHOTROPIC SHELL OF REVOLUTION UNDER EXTERNAL PRESSURE NON-UNIFORMLY DISTRIBUTED ALONG THE ANGULAR COORDINATE

A.N. Andreev

A computational technique is proposed to determine critical parameters of stability of a layered composite orthotropic shell loaded with an external non-uniformly distributed pressure. The stability investigation results are given for a conical shell.

Keywords: shells of revolution, stability, non-uniform external pressure, computational technique.