УДК 539.374

ЗАДАЧА О ШЕЙКЕ ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ПОЛОСЫ

И.Э. Келлер

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

kie@pstu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Поставлена задача классификации нелинейно-вязких определяющих соотношений в зависимости от характера поведения свободной границы полосы при ее одноосном растяжении. Представлены результаты исследования задачи в слабо и сильно нелинейной постановках.

Ключевые слова: задача о шейке, нелинейно вязкая среда, свободная граница, автомодельные локализованные и распространяющиеся решения.

Определенное продвижение в понимании природы сверхпластических состояний металлов могла бы принести их феноменологическая трактовка, т.е. формулировка ограничений на класс неупругих определяющих соотношений, гарантирующих достижение в макроскопических испытаниях одноосным растяжением или кручением аномально больших деформаций. Эта идея приводит к обратной краевой задаче, лежащей вне рамок «принципа образца», поскольку достижению больших деформаций в указанных выше экспериментах мешает локализация деформации, неограниченное развитие шеек или спиралей локализации деформации на свободной поверхности образцов.

С этой целью поставлена простейшая физически и кинематически нелинейная задача квазистатического одноосного растяжения полосы со свободными границами («задача о шейке») [1]. В качестве модели материала приняты соотношения несжимаемой нелинейно-вязкой среды Рейнера – Ривлина с произвольной скалярной функцией, которую требуется определить из условий существования решений для эволюции свободной границы, устойчивых по отношению к неограниченному развитию шеек. Материал полосы подчиняется уравнениям равновесия

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{\sigma}=-p\mathbf{I}+\frac{\tau(\xi)}{\xi}\mathbf{D},\qquad \mathbf{D}=\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}+\mathbf{v}\nabla),\quad \nabla\cdot\mathbf{v}=0,\tag{1}$$

где ∇ – пространственный градиент, $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{D}$ – тензоры напряжений и деформаций скорости, p – гидростатическое давление, $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга, $\mathbf{v}$ – скорость перемещений, $\xi = \sqrt{1/2\mathbf{D}:\mathbf{D}}$ – интенсивность скоростей деформаций, $\tau(\xi)$ – произвольная материальная функция, а также статическим

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla w=\mathbf{0}\tag{2}$$

и кинематическим

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla w=\mathbf{0}\tag{3}$$

условиям на свободной границе $w = y - \eta(x, t) = 0$, где x, y, t – продольная, поперечная координаты и время. Рассматриваются малые возмущения (x, t) однородного по напряжениям «основного» процесса растяжения полосы, исчезающие на бесконечно удаленных концах.

Методом многих масштабов асимптотического анализа из (1)–(3) выведены уравнения для членов ряда $\eta=\varepsilon\eta_0+\varepsilon^2\eta_1+\ldots$, где $\eta_i(x,t,\chi,\tau)\sim\varepsilon^0$, а $\chi\equiv\varepsilon x$, $\tau\equiv\varepsilon t$, первое из которых имеет вид:

$$\eta_{0,t}+\kappa_1\eta_0+x\eta_{0,x}+\kappa_2\eta_{0,xx}=0,\qquad \kappa_1\equiv\frac{m-1}{m+1},\quad \kappa_2\equiv\frac{2m+1}{3(m+1)}.\tag{4}$$

Материальный параметр $m \equiv d\ln\tau/d\ln\xi$ чувствительности к скорости деформаций полагался слабо зависящим от аргумента, что имеет место вблизи локального максимума, ассоциируемого со сверхпластическим состоянием и соответствующим скорости деформации полосы в основном состоянии. Поскольку для вязких сред со степенной нелинейностью уравнения равновесия в скоростях линейны, при выводе уравнений для возмущений удалось воспользоваться методом Кортевега и де Вриза. Нелинейность в этих уравнениях вызывается исключительно наличием свободной границы.

Экспоненциально-автомодельной подстановкой

$$\eta_0=f(\zeta),\quad \zeta\equiv x-\omega e^t\tag{5}$$

уравнение (4) сводится к обыкновенному $\kappa_2 f,_{\zeta\zeta} + \zeta f,_{\zeta} + \kappa_1 f = 0$, имеющему решение

$$f(\zeta) = a \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\kappa_2}\right)\Phi\left(\frac{1-\kappa_1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\zeta^2}{2\kappa_2}\right) + b\zeta \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\kappa_2}\right)\Phi\left(\frac{2-\kappa_1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\zeta^2}{2\kappa_2}\right), \quad (6)$$

где $a(\chi,\tau),\ b(\chi,\tau) \sim \varepsilon^0$. Это решение имеет локализованный характер при $m < -1$ или $m > 1$.

Особенность решения (6) состоит в том, что профиль возмущения свободной границы не изменяется со временем в системе отсчета ζ, движущейся как жесткое целое вместе с материальной точкой в начале координат $\zeta = 0$, при этом относительно системы отсчета ζ материал испытывает растяжение. При $m = 1$ (реология линейно-вязкой жидкости) решение (6) трансформируется в кинк, описываемый интегралом вероятностей $f(\zeta) = b(\chi,\tau)\sqrt{\pi}/2\mathrm{erf}(\zeta)$. В этом случае граничным условиям удается удовлетворить, если вместо (5) использовать анзац

$$\eta_0 = f(x - x_* e^t) - f(x + x_* e^t). \quad (7)$$

Решение (7) имеет вид распределенной однородно растягиваемой шейки с фиксированной глубиной и неподвижными относительно лагранжевых координат $\pm x_*$ берегами не изменяемого со временем профиля.

Медленная динамика возмущения, содержащаяся в зависимостях $a(\chi,\tau),\ b(\chi,\tau)$, находится из уравнения для η_1, относительно системы отсчета ζ принимающего вид:

$$\kappa_1\eta_1 + \zeta\eta_1,_{\zeta} + \kappa_2\eta_1,_{\zeta\zeta} = -\eta_0,_{\tau} - \zeta\eta_0,_{\chi} - p\eta_0,_{\zeta\chi} + (q_1 + q_2\zeta^2)(\eta_0,_{\chi})^2 + q_3\zeta\eta_0\eta_0,_{\chi} + q_4\eta_0^2, \quad (8)$$

где p, q_i – известные функции m [2]. Проецированием (8) на базис сопряженного однородного уравнения получаем пару однородных уравнений в частных производных с квадратичными нелинейностями

$$\begin{gathered} \alpha a,_{\tau} + \beta b,_{\chi} + \gamma a^2 + \delta b^2 = 0, \\ \omega b,_{\tau} + \mu a,_{\chi} + \lambda ab = 0, \end{gathered} \quad (9)$$

описывающих медленную динамику свободной границы (коэффициенты – функции m). Система (9) имеет решения в виде бегущих волн (в том числе стационарных) произвольного профиля:

$$a = a(\vartheta), \quad b = b(\vartheta), \quad \vartheta = k\chi - c\tau.$$

Линейными обратимыми преобразованиями $u = -c\alpha a + k\beta b$, $v = -c\omega b + k\mu a$ (9) можно свести к системе $u' + Q_1(u, v) = 0$, $v' + Q_2(u, v) = 0$, где Q_i – однородные квадратичные функции, имеющей одно или три частных решений вида $u = \sigma_k v$, где скаляры σ_k находятся из алгебраического уравнения

$$\sigma_k = Q_1(\sigma_k, 1)/Q_2(\sigma_k, 1).$$

Устойчивость соответствующих решений определяется из анализа линеаризованной системы (9). Проведенный анализ позволяет локализовать сверхпластические состояния нелинейно-вязкой среды на оси изменения параметра m.

Для получения глобальных ограничений на материальную функцию задача должна рассматриваться в сильно нелинейной постановке [3]. Данная задача поставлена в изостатической системе координат. Гипотеза о потенциальности поля скоростей позволяет использовать аппарат функций комплексной переменной, в терминах которых условия совместности системы и конформности отображения полосы на полосу с неизвестной свободной границей сводятся к системе уравнений эйконала и Лапласа, имеющих совместное точное аналитическое решение, а уравнения равновесия накладывают ограничение на материальную функцию.

Хотя данная гипотеза не соответствует задаче со свободной границей, совместные решения вышеупомянутой системы расширяются до квазиконформных отображений, что внушает оптимизм относительно существования содержательных решений исходной постановки задачи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ-Урал (грант №10-01-96053) и Интеграционной программы УрО, СО и ДВО РАН (проект №09-С-1-1008).

Список литературы

1. Keller I.E. // J. Appl. Mech. Techn. Phys. 2010. V. 51, No 1. P. 99–105.

2. Болдырев К.Е., Келлер И.Э. // Неравновесные процессы в сплошных средах. Пермь: ПГУ. 2010. С. 43–46.

3. Келлер И.Э. // http://dl.dropbox.com/u/3612585/Work/Keller-Samgu-r.pdf.

THE PROBLEM OF NECKING IN A NONLINEAR VISCOUS BAND UNDER UNIAXIAL TENSION

I.E. Keller

The problem of classification of nonlinear viscous constitutive relations according to the behavior of a free boundary of the band under uniaxial tension is considered. The results of studying the problem in the weakly and strongly nonlinear formulation are presented.droplets and ice crystals is given.

Keywords: necking problem, nonlinear viscous medium, free boundary, self-similar localized and extended solutions.