

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ ОБОСНОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТОВ
ПО ОБНАРУЖЕНИЮ ЭФФЕКТОВ МОМЕНТНОГО ПОВЕДЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ**

© 2011 г.

В.В. Корепанов

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

kvv@icmm.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Разработан конечно-элементный алгоритм для решения трехмерных статических и динамических задач в рамках несимметричной теории упругости (континуум Коссера). Для каждой из задач выявлены наиболее «яркие» отличия моментного и безмоментного решений. На основе полученных решений определены макропараметры, характеризующие моментные эффекты, и мера отклика на эти свойства. Построены графические зависимости величин меры отклика макропараметров от линейных характерных размеров задач. Показано, что, как правило, мера отклика на моментные свойства материала немонотонно возрастает при уменьшении линейного характерного размера задачи. Анализ решений статических и динамических задач по оценке меры отклика на моментные свойства позволил установить возможные рациональные схемы экспериментов по выявлению моментных свойств материалов.

Ключевые слова: несимметричная теория упругости, континуум Коссера, моментные эффекты.

Анализ публикаций, посвященных микрополярным (моментным) средам показывает, что число работ, посвященных экспериментальным исследованиям невелико, несмотря на сформировавшееся утверждение о том, что необеспеченность экспериментальными результатами сдерживает практические приложения моментной теории упругости. В экспериментах по идентификации физических параметров симметричной теории упругости обычно наблюдается стремление обеспечить однородность напряженно-деформированного состояния. Известно, что моментные свойства среды могут проявиться в виде отклика на макроуровне лишь в условиях неоднородного напряженного состояния [1]. Это обстоятельство принципиально отличает необходимые условия экспериментального определения материальных параметров для физических уравнений микрополярного континуума (континуум Коссера). Обеспечение условий неоднородности и градиентности является одним из основных факторов, затрудняющих идентификацию материальных констант. Другая, не менее значимая и затрудняющая реализацию эксперимента причина состоит в том, что моментные свойства материала проявляются на линейных масштабах, близких к масштабам его структурных компонент. Последнее обстоятельство обуславливает необходимость тщательного анализа и выбора измеряемых макропараметров, а также предъявляет высокие требования к точности измерений.

Решение новых задач несимметричной теории упругости и вычислительные эксперименты расширяют возможности поиска новых схем экспериментов для установления фактов моментного поведения материалов при их упругом деформировании, позволяют оценить параметры, измеряемые в эксперименте и погрешность в эксперименте от различных геометрических и механических характеристик.

На основе вариационного уравнения Лагранжа (принцип возможных перемещений) разработан конечно-элементный алгоритм статического деформирования и собственных колебаний в рамках теории среды Коссера. Вариационное уравнение имеет вид [2]:

$$\int_V (\tilde{\sigma} \cdot \delta \tilde{\gamma} + \tilde{\mu} \cdot \delta \tilde{\chi}) dV - \int_V (\mathbf{X} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{Y} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dV = \int_S (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u} + \mathbf{m} \cdot \delta \boldsymbol{\omega}) dS + \int_V \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{u} + j \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} \cdot \delta \boldsymbol{\omega} \right) dV, \quad (1)$$

где \mathbf{X} – вектор массовых сил, \mathbf{Y} – вектор массовых моментов, \mathbf{u} – вектор перемещения, $\boldsymbol{\omega}$ – вектор поворота; $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\chi}$ – тензоры деформаций и изгиба-кручения, $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\mu}$ – тензоры напряжений и моментных напряжений; \mathbf{p} , \mathbf{m} – интенсивность внешних поверхностных сил и моментов, ρ – плотность, j – динамическая характеристика среды (мера инерции при вращении).

Выполнена серия численных экспериментов, в которых продемонстрирована достоверность алгоритмов; приведены конкретные численные результаты о сходимости при увеличении числа элементов; проведено сопоставление результатов, полученных при различных вариантах аппроксимации искомым неизвестных (вектора перемещений и вектора поворота) в элементе с целью выбора оптимального варианта.

Построение конечно-элементной сетки реализуется с помощью пакета программ ANSYS (лицензия № 392853). Формирование разрешающей системы уравнений и ее решение осуществляется на основе разработанного конечно-элементного алгоритма для решения трехмерных задач в рамках несимметричной теории упругости с заложеной в него информацией о конечно-элементной сетке. Получены численные решения ряда трехмерных задач о статическом деформировании, демонстрирующие наиболее «яркие» моментные эффекты на основе сопоставления решений в рамках симметричной и несимметричной теорий упругости: задача об одноосном растяжении пластины с отверстиями различных конфигураций; задача о растяжении пластины с жесткими деформируемыми включениями; задача о растяжении пластины с трещиной [3].

Для каждой из задач определены макропараметры, характеризующие моментные эффекты, и мера отклика на эти свойства. Мера отклика оценивалась путем сопоставления указанных макропараметров, полученных в рамках моментного и безмоментного решений. Выбор макропараметра осуществлялся с учетом возможности его экспериментальной регистрации. Для задач о растяжении пластины с отверстиями или включениями в качестве макропараметра выбирается степень искажения отверстий (включений) в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Для задачи о растяжении пластины с трещиной в качестве макропараметра выбирается степень раскрытия трещины. Проведена оценка чувствительности выбранных макропараметров в зависимости от «моментных» физических констант материала и характерных размеров (масштабов). На двухмерных и трехмерных задачах выполнены численные исследования, позволяющие оценить границы применимости допущений о плоско-деформиру-

ванном и плоско-напряженном состояниях, влияние погрешностей в изготовлении образцов на значения регистрируемых в эксперименте параметров. Предложены возможные экспериментальные схемы определения выбранных макропараметров в реальных экспериментах и средства их измерения [4].

Построены графические зависимости величин меры отклика макропараметров от линейных характерных размеров задач. Показано, что, как правило, мера отклика на моментные свойства материала немонотонно возрастает при уменьшении линейного характерного размера задачи. На основе анализа полученных решений найдены наиболее «яркие» случаи проявления моментных свойств при деформировании упругих материалов.

С использованием разработанного алгоритма проведен анализ ряда двумерных и трехмерных задач о собственных формах и частотах колебаний упругих тел. В этих задачах осуществлен параметрический анализ зависимости собственных частот от упругих параметров, характеризующих моментные свойства материала. Выявлены собственные формы, в которых доминирующими являются компоненты вектора поворота. Как и в случае статических задач, построены зависимости мер отклика на моментные свойства от характерных линейных размеров.

Совокупность результатов анализа решений статических и динамических задач по оценке меры отклика на моментные свойства позволила установить возможные рациональные схемы экспериментов по выявлению моментных свойств материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-08-01020).

Список литературы

1. Онами М. и др. Введение в микромеханику. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
3. Корепанов В.В., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. // Изв. РАН. МТТ. 2008. №2. С. 63–70.
4. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2, №4. С. 79–91.

**NUMERICAL VERIFICATION OF THE EXPERIMENTS ON DETECTION
OF COUPLE-STRESS EFFECTS IN THE BEHAVIOR OF MATERIALS***V.V. Korepanov*

A finite-element algorithm is proposed to solve three-dimensional static and dynamic problems in the framework of the asymmetric theory of elasticity (the Cosserat continuum). For each problem, the most pronounced differences between the solutions with and without couple-stress effects have been defined. The analysis of the obtained solution made it possible to determine macroparameters characterizing the couple-stress effects, and the measure of their response to these effects. The relationship between the measure of response of the macroparameters and the linear characteristic dimensions of the problem are plotted graphically. It has been shown that generally the measure of response to the couple-stress properties of the material increases non-monotonically with a decrease of the linear characteristic dimension of the problem. The results of analysis of the solutions to the static and dynamic problems on the estimation of the measure of response to the couple-stress effects are used to develop the optimal schemes of experiments on detection of couple-stress effects in the behavior of materials.

Keywords: asymmetric theory of elasticity, the Cosserat continuum, couple-stress effects.