УДК 539.3

МЕТОД И РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА ХАРАКТЕРА СИНГУЛЯРНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Т.О. Корепанова, Н.В. Севодина

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

ton@icmm.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предлагается метод построения сингулярных решений для конических тел, рассматриваются варианты его численной реализации на основе метода конечных элементов. Приводятся результаты численных экспериментов, иллюстрирующие эффективность и достоверность предлагаемого метода, результаты расчета собственных значений, определяющих характер сингулярности напряжений для конусов с гладкой и негладкой боковой поверхностью при различных граничных условиях.

Ключевые слова: сингулярность напряжений, собственные значения, конические тела, метод конечных элементов.

В задачах теории упругости возможны сингулярные решения, связанные с появлением бесконечных значений напряжений в точках границы (особых точках) рассматриваемой области, где имеет место нарушение гладкости поверхности, смена типа краевых условий или контакт различных материалов. При наличии сингулярных решений важное теоретическое и прикладное значение имеет оценка характера поведения напряжений (характера сингулярности) в окрестности особых точек. Как правило, решение этой задачи связано с рассмотрением плоских клиновидных тел в двумерных вариантах пространственных клиньев, конусов и многогранных клиновидных тел в трехмерных вариантах.

Рассматривается полубесконечный конус, боковая поверхность которого может быть гладкой или иметь образующие, где нарушается ее гладкость или имеет место смена типа краевых условий. Вершина конуса совпадает с центром сферической системы координат (r, θ, φ), а основание перпендикулярно оси $\theta = 0$. На боковой поверхности конуса могут быть заданы смешанные граничные условия, когда при $0 \le \varphi \le \varphi_1$ заданы нулевые перемещения, а при $\varphi_1 \le \varphi \le 2\pi$ – нулевые напряжения. Кроме сплошного конуса, предметом исследований может быть полый конус, имеющий две боковые поверхности. Для кругового конуса область, занимаемая телом, определяется следующим образом: $0 \le r \le \infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_0$ ($\theta_1 = 0$ соответствует сплошному конусу).

Для анализа сингулярности напряжений необходимо построить собственные решения задачи, совпадающие с известным в линейной теории упругости асимптотическим представлением решения в окрестности угловых точек [1]:

$$u_k(r,\theta,\varphi) = r^{\lambda} F_k(\theta,\varphi) \quad (k = 1,2,3). \tag{1}$$

Такая форма представления решения используется при построении собственных решений для конусов с гладкой боковой поверхностью [2]. В трехмерной задаче условие определяет область сингулярных решений, которые приводят к бесконечным значениям напряжений в вершине конуса.

Для конусов с ребрами на боковой поверхности рассматриваются два варианта представления собственных решений линейной теории упругости. Первый вариант совпадает по форме с известным асимптотическим представлением решения линейной упругой задачи в угловых точках. Во втором варианте вводятся дополнительные сомножители, которые учитывают характер сингулярности напряжений на ребрах боковой поверхности [3]:

$$u_k(r,\theta,\varphi) = r^{\eta} \rho_1^{\alpha_1} \rho_2^{\alpha 2} \ldots \rho_j^{\alpha_j} \ldots \rho_n^{\alpha_n} \xi_k(\theta,\varphi) \quad (k = 1,2,3). \tag{2}$$

Здесь ρ_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) эквивалентно расстоянию от оси $\theta = 0$ до j-й особой линии. В качестве величины α_j из всех собственных значений задач для плоского клина при плоско-деформированном состоянии и антиплоской деформации, определяющих сингулярность напряжений на соответствующем ребре конуса, выбирается собственное значение с наименьшей величиной действительной части значения.

Собственные решения (1) и (2) удовлетворяют однородным уравнениям равновесия в перемещениях и однородным граничным условиям на боковой поверхности конуса. Для решения задачи применяется численный метод, основанный на слабой форме записи исходной дифференциальной постановки задачи с последующим использованием процедуры метода конечных элементов. Этот метод приводит рассматриваемую задачу к алгебраической проблеме комплексных собственных значений, решение которой является наиболее трудоемким фрагментом всего численного анализа с точки зрения получения численных результатов. Для решения этой задачи разработан оригинальный алгоритм на основе метода Мюллера и принципа аргумента.

Вариант численного метода на основе классической постановки задачи теории упругости в перемещениях (уравнения Ламе) неприменим для несжимаемых материалов. Кроме этого, из опыта решения других задач известно, что при численной реализации возможны большие погрешности для слабосжимаемых материалов. В связи с этим разработан численный метод для расчета показателей сингулярности напряжений на основе постановки задачи теории упругости в перемещениях (уравнения Томпсона), справедливый для всех значений коэффициента Пуассона.

Были выполнены численные эксперименты, иллюстрирующие сходимость метода и его достоверность на основе сравнения с известными аналитическими [3] и численными результатами.

Был проведен анализ характера напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины упругого кругового конуса с двумя граничными коническими поверхностями (полый конус), на которых заданы различные граничные условия. В данном случае может быть использован вариант метода, основанный на представлении решения в виде ряда Фурье по угловой координате φ.

На основе разработанного метода были выполнены расчеты для составного конуса, позволяющие оценить влияние соотношений механических характеристик слоев конуса на показатели сингулярности напряжений. Для составного кругового конуса на границе контакта внутренней и внешней подобластей дополнительно к граничным условиям в перемещениях или напряжениях на боковой конической поверхности выполняются условия идеального контакта при $\theta = \theta_1$. Выполнено исследование зависимости показателей сингулярности напряжений от соотношений упругих постоянных внутренней и внешней подобластей при различных значениях θ_1 и θ_0.

Выполнены расчеты показателей сингулярности напряжений для составного конуса с внутренней особой точкой. На границе различных материалов $\theta = \theta_1$ рассмотрены условия идеального контакта между слоями и условия идеального скольжения. Исследовано влияние внутреннего угла θ_1 на показатели сингулярности напряжений во внутренней особой точке при условиях на поверхности контакта слоев в виде идеального скрепления и идеального скольжения при различных значениях механических характеристик материалов. На основе разработанного алгоритма были получены новые численные результаты, свидетельствующие о сингулярном характере напряжений в вершине кругового конуса, часть боковой поверхности которого неподвижна, а оставшаяся часть свободна от напряжений, и в вершине конуса с негладкой боковой поверхностью и однородными граничными условиями. Исследована зависимость собственных значений от величины угла, определяющей границу смены типа краевых условий.

В качестве иллюстрации применимости метода к расчету многогранных клиньев рассматривается половина кругового конуса (полуконус), который образуется частью конической поверхности и плоскостью, проходящей через вершину конуса и его полуось. Исследовалась зависимость показателей сингулярности напряжений от угла раствора полуконуса при различных граничных условиях на боковых поверхностях, в том числе при смешанных граничных условиях, когда на части конической поверхности задаются нулевые напряжения, на плоскости, проходящей через вершину конуса и полуось, задаются нулевые перемещения [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МК 5286.2010.1).

Список литературы

1. Кондратьев В.А. // Труды Московского математического общества. 1967. Т. 16. С. 209–292.
2. Матвеенко В.П., Накарякова Т.О., Севодина Н.В., Шардаков И.Н. // ПММ. 2008. Т. 72, вып. 3. С. 487–494.
3. Bazant Z.P. // Int. J. Eng. Sci. 1974. No 12. P. 221–243.
4. Kozlov V.A., Maz'ya V.G., Rossmann J. // Amer. Math. Soc., ser. Mathematical Surveys and Monographs. N.J.: Providence RI, 2001. V. 85. 436 p.
5. Корепанова Т.О., Матвеенко В.П., Севодина Н.В. // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3, №3. С. 68–76.

A METHOD AND RESULTS OF CALCULATION OF THE NATURE OF STRESS SINGULARITIES IN THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS

T.O. Korepanova, N.V. Sevodina

A method of constructing singular solutions for conical bodies is presented. Different versions of its numerical implementation based on the finite element method are considered. The results of calculation of eigenvalues that define the nature of stress singularities in the cones with smooth and non-smooth lateral surface under various boundary conditions are presented. Numerical experiments demonstrate the effectiveness and reliability of the method.

Keywords: stress singularity, eigenvalues, conical bodies, finite element method.