

УДК 539.0

**ФОРМУЛИРОВКИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ  
ГИПЕРУПРУГОСТИ В СКОРОСТЯХ**

© 2011 г.

*С.Н. Коробейников*

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

kurguzov@hydro.nsc.ru

*Поступила в редакцию 15.06.2011*

Развиты формулировки определяющих соотношений гиперупругости в скоростях для произвольных пар объективных (лагранжевых и эйлеровых) семейств сопряженных по мощности внутренних сил тензоров напряжений и деформаций.

*Ключевые слова:* гиперупругость, определяющие соотношения.

Математическое моделирование процессов деформирования твердых тел требует формулировки уравнений механики деформируемых твердых тел в скоростях. Необходимость записи уравнений в скоростях обусловлена применением процедур решения задач методом продолжения по монотонно возрастающему параметру деформирования (времени) и использованием критериев потери устойчивости равновесных состояний деформируемых твердых тел [1]. В рамках развития уравнений такого типа важным аспектом является корректная формулировка определяющих соотношений механики деформируемых твердых тел в скоростях [1, 2].

Развиваются формулировки определяющих соотношений гиперупругости в скоростях для произвольных пар объективных (лагранжевых и эйлеровых) семейств сопряженных по мощности внутренних сил тензоров напряжений и деформаций [1–4]. Основная идея исследования состоит в получении таких форм определяющих соотношений, которые могут быть сравнительно просто введены в уравнения движения деформируемого тела в общей и текущей лагранжевой формулировках.

**Общая лагранжева формулировка уравнений**

В общем случае базовые формулировки гиперупругости развиваются для пар сопряженных в классическом смысле лагранжевых тензоров напряжений и деформаций [4]. Для общей лагранжевой формулировки уравнений предпочтительной (базовой) парой тензоров напряжений и деформаций является пара сопряженных в классическом смысле симметричных лагранжевых

тензоров напряжений и деформаций: второй тензор напряжений Пиола–Киргофа и тензор деформаций Грина–Лагранжа. Под скоростями этих тензоров понимаем материальные производные по времени, которые так же, как и сами эти тензоры, имеют лагранжеву объективность. Получено явное выражение тензора упругости четвертого ранга, связывающего материальные производные тензоров напряжений и деформаций базовой пары, но выражение этого тензора четвертого ранга получено для удельной потенциальной энергии деформаций, сформулированной в терминах произвольного тензора деформаций из семейства лагранжевых обобщенных тензоров деформаций.

**Текущая лагранжева формулировка уравнений**

Пусть тензоры в паре сопряженных (в классическом или обобщенном смысле) эйлеровых тензоров напряжений и деформаций получены операциями отображения [4] из одной конфигурации деформируемого тела на другую, примененными к некоторой паре сопряженных в классическом смысле лагранжевых тензоров напряжений и деформаций. В [4] сформулирована и доказана теорема, позволяющая получить формулировку определяющих соотношений гиперупругости для такой пары эйлеровых тензоров, исходя из формулировки определяющих соотношений гиперупругости для соответствующей пары лагранжевых тензоров. В [4] показано, что пару сопряженных в обобщенном смысле эйлеровых тензоров напряжений Кирхгофа и деформаций Альманси можно получить операциями отображения из отсчетной конфигурации в текущую, применен-

ными к паре сопряженных в классическом смысле лагранжевых тензоров, а именно, ко второму тензору напряжений Пиола–Кирхгофа и тензору деформаций Грина–Лагранжа. Эта пара эйлеровых тензоров является предпочтительной (базовой) парой тензоров напряжений и деформаций для текущей лагранжевой формулировки уравнений гиперупругости.

В настоящем исследовании определяется операция отображения тензора четвертого ранга, а также формулируется и доказывается теорема, позволяющая для рассмотренных выше базовых пар сопряженных эйлеровых и лагранжевых тензоров деформаций, связанных операциями отображения из одной конфигурации тела на другую, получить формулировки определяющих соотношений гиперупругости в виде квазилинейной связи объективных производных тензоров напряжений Кирхгофа и деформаций Альманси.

Этими объективными эйлеровыми производными (скоростями) тензоров являются (верхняя) производная Олдройда тензора напряжений Кирхгофа и производная Коттера–Ривлина (нижняя производная Олдройда) тензора деформаций Альманси, которая равна тензору скорости деформаций.

Получено явное выражение тензора упругости четвертого ранга, связывающего эти эйлеровы скорости тензоров напряжений и деформаций через использование операции отображения из отсчетной конфигурации на текущую конфигурацию тензора упругости, связывающего материальные производные лагранжевых тензоров напряжений и деформаций базовой пары. Выражение этого тензора четвертого ранга получено для удельной потенциальной энергии деформаций, сформулированной в терминах произвольного тензора деформаций из семейства эйлеровых обобщенных тензоров деформаций.

### Изотропные гиперупругие среды

Для изотропных гиперупругих сред базовые формулировки гиперупругости можно развивать

независимо для пар сопряженных в классическом смысле лагранжевых и эйлеровых тензоров напряжений и деформаций [4]. Упрощение общих формулировок происходит вследствие соосности тензоров напряжений и деформаций для каждого из лагранжева и эйлера семейств обобщенных тензоров напряжений и деформаций для изотропных гиперупругих сред [2]. Для этих сред проведена специализация общих формулировок гиперупругости. Получены явные выражения тензоров упругости четвертого ранга, связывающих объективные скорости тензоров для базовых пар общей и текущей лагранжевых формулировок уравнений гиперупругости.

### Использование собственных проекций тензоров деформаций

Практическое приложение развитых формулировок определяющих соотношений гиперупругости в скоростях обеспечивается представлениями тензоров упругости четвертого ранга в собственных проекциях правого тензора деформаций Коши–Грина и левого тензора деформаций Пиола [1], удобных, соответственно, при использовании общей лагранжевой формулировки уравнений в переменных Лагранжа и текущей лагранжевой формулировки уравнений в переменных Эйлера.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-08-00684) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН №119.*

### Список литературы

1. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000.
2. Ogden R.W. Non-linear Elastic Deformations. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
3. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. // Сиб. журн. индустр. мат. 2004. Т. 7, №3. С. 21–43.
4. Korobeynikov S.N. // J. Elast. 2008. V. 93, No 2. P. 105–140.
5. Korobeynikov S.N. // Acta Mech. 2011. V. 216, No 1–4. P. 301–332.

## RATE FORMULATIONS OF CONSTITUTIVE RELATIONS OF HYPERELASTICITY

*S.N. Korobeynikov*

Rate formulations of constitutive relations of hyperelasticity for any pairs of work conjugate objective (Lagrangian and Eulerian) families of stress and strain tensors are developed.

*Keywords:* hyperelasticity, constitutive relations.