

УДК 539.0

**ФОРМУЛИРОВКИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ
ГИПЕРУПРУГОСТИ В СКОРОСТЯХ**

© 2011 г.

С.Н. Коробейников

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

kurguzov@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Развиты формулировки определяющих соотношений гиперупругости в скоростях для произвольных пар объективных (лагранжевых и эйлеровых) семейств сопряженных по мощности внутренних сил тензоров напряжений и деформаций.

Ключевые слова: гиперупругость, определяющие соотношения.

Математическое моделирование процессов деформирования твердых тел требует формулировки уравнений механики деформируемых твердых тел в скоростях. Необходимость записи уравнений в скоростях обусловлена применением процедур решения задач методом продолжения по монотонно возрастающему параметру деформирования (времени) и использованием критериев потери устойчивости равновесных состояний деформируемых твердых тел [1]. В рамках развития уравнений такого типа важным аспектом является корректная формулировка определяющих соотношений механики деформируемых твердых тел в скоростях [1, 2].

Развиваются формулировки определяющих соотношений гиперупругости в скоростях для произвольных пар объективных (лагранжевых и эйлеровых) семейств сопряженных по мощности внутренних сил тензоров напряжений и деформаций [1–4]. Основная идея исследования состоит в получении таких форм определяющих соотношений, которые могут быть сравнительно просто введены в уравнения движения деформируемого тела в общей и текущей лагранжевой формулировках.

Общая лагранжева формулировка уравнений

В общем случае базовые формулировки гиперупругости развиваются для пар сопряженных в классическом смысле лагранжевых тензоров напряжений и деформаций [4]. Для общей лагранжевой формулировки уравнений предпочтительной (базовой) парой тензоров напряжений и деформаций является пара сопряженных в классическом смысле симметричных лагранжевых

тензоров напряжений и деформаций: второй тензор напряжений Пиола–Киргофа и тензор деформаций Грина–Лагранжа. Под скоростями этих тензоров понимаем материальные производные по времени, которые так же, как и сами эти тензоры, имеют лагранжеву объективность. Получено явное выражение тензора упругости четвертого ранга, связывающего материальные производные тензоров напряжений и деформаций базовой пары, но выражение этого тензора четвертого ранга получено для удельной потенциальной энергии деформаций, сформулированной в терминах произвольного тензора деформаций из семейства лагранжевых обобщенных тензоров деформаций.

Текущая лагранжева формулировка уравнений

Пусть тензоры в паре сопряженных (в классическом или обобщенном смысле) эйлеровых тензоров напряжений и деформаций получены операциями отображения [4] из одной конфигурации деформируемого тела на другую, примененными к некоторой паре сопряженных в классическом смысле лагранжевых тензоров напряжений и деформаций. В [4] сформулирована и доказана теорема, позволяющая получить формулировку определяющих соотношений гиперупругости для такой пары эйлеровых тензоров, исходя из формулировки определяющих соотношений гиперупругости для соответствующей пары лагранжевых тензоров. В [4] показано, что пару сопряженных в обобщенном смысле эйлеровых тензоров напряжений Кирхгофа и деформаций Альманси можно получить операциями отображения из отсчетной конфигурации в текущую, применен-

ными к паре сопряженных в классическом смысле лагранжевых тензоров, а именно, ко второму тензору напряжений Пиола–Кирхгофа и тензору деформаций Грина–Лагранжа. Эта пара эйлеровых тензоров является предпочтительной (базовой) парой тензоров напряжений и деформаций для текущей лагранжевой формулировки уравнений гиперупругости.

В настоящем исследовании определяется операция отображения тензора четвертого ранга, а также формулируется и доказывается теорема, позволяющая для рассмотренных выше базовых пар сопряженных эйлеровых и лагранжевых тензоров деформаций, связанных операциями отображения из одной конфигурации тела на другую, получить формулировки определяющих соотношений гиперупругости в виде квазилинейной связи объективных производных тензоров напряжений Кирхгофа и деформаций Альманси.

Этими объективными эйлеровыми производными (скоростями) тензоров являются (верхняя) производная Олдройда тензора напряжений Кирхгофа и производная Коттера–Ривлина (нижняя производная Олдройда) тензора деформаций Альманси, которая равна тензору скорости деформаций.

Получено явное выражение тензора упругости четвертого ранга, связывающего эти эйлеровы скорости тензоров напряжений и деформаций через использование операции отображения из отсчетной конфигурации на текущую конфигурацию тензора упругости, связывающего материальные производные лагранжевых тензоров напряжений и деформаций базовой пары. Выражение этого тензора четвертого ранга получено для удельной потенциальной энергии деформаций, сформулированной в терминах произвольного тензора деформаций из семейства эйлеровых обобщенных тензоров деформаций.

Изотропные гиперупругие среды

Для изотропных гиперупругих сред базовые формулировки гиперупругости можно развивать

независимо для пар сопряженных в классическом смысле лагранжевых и эйлеровых тензоров напряжений и деформаций [4]. Упрощение общих формулировок происходит вследствие соосности тензоров напряжений и деформаций для каждого из лагранжева и эйлера семейств обобщенных тензоров напряжений и деформаций для изотропных гиперупругих сред [2]. Для этих сред проведена специализация общих формулировок гиперупругости. Получены явные выражения тензоров упругости четвертого ранга, связывающих объективные скорости тензоров для базовых пар общей и текущей лагранжевых формулировок уравнений гиперупругости.

Использование собственных проекций тензоров деформаций

Практическое приложение развитых формулировок определяющих соотношений гиперупругости в скоростях обеспечивается представлениями тензоров упругости четвертого ранга в собственных проекциях правого тензора деформаций Коши–Грина и левого тензора деформаций Пиола [1], удобных, соответственно, при использовании общей лагранжевой формулировки уравнений в переменных Лагранжа и текущей лагранжевой формулировки уравнений в переменных Эйлера.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-08-00684) и в рамках Интеграционного проекта СО РАН №119.

Список литературы

1. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000.
2. Ogden R.W. Non-linear Elastic Deformations. Chichester: Ellis Horwood, 1984.
3. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. // Сиб. журн. индустр. мат. 2004. Т. 7, №3. С. 21–43.
4. Korobeynikov S.N. // J. Elast. 2008. V. 93, No 2. P. 105–140.
5. Korobeynikov S.N. // Acta Mech. 2011. V. 216, No 1–4. P. 301–332.

RATE FORMULATIONS OF CONSTITUTIVE RELATIONS OF HYPERELASTICITY

S.N. Korobeynikov

Rate formulations of constitutive relations of hyperelasticity for any pairs of work conjugate objective (Lagrangian and Eulerian) families of stress and strain tensors are developed.

Keywords: hyperelasticity, constitutive relations.