Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1552–1553

УДК 539.3

# ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ТЕЛ С ЖИДКИМИ НАПОЛНИТЕЛЯМИ

 ***М.В. Кудин***

Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

belov_a2@mail.ru

*Поступила в редакцию 15.06.2011*

Рассматриваются модели упругих и акустических сред. Для решения задач контакта твердого тела с акустической средой построена система граничных интегральных уравнений. Для создания гранично-элементной методики разработан новый метод численного обращения преобразования Лапласа. На модельной задаче продемонстрированы возможности применения гранично-элементной методики при получении решения задачи акустики, имеющей аналитическое решение. Приведены примеры численного решения модельных задач и задач прикладного назначения. Гранично-элементные решения сравниваются с конечно-элементным расчетом.

*Ключевые слова:* граничный элемент, граничные интегральные уравнения, тело с жидким наполнителем.

## Введение

Разработана гранично-элементная методика, позволяющая охватить достаточно широкий класс прикладных задач. Все гранично-элементные решения сравниваются с результатами расчета методом конечного элемента.

## Математические модели

Рассматривается кусочно-однородное тело $\Omega$ в трехмерном евклидовом пространстве с декартовой системой координат. Границу тела обозначим через $\Gamma$, а границы однородных частей $\Omega_k$ – через $\Gamma_k$. Предполагается, что $\Omega_k$ являются изотропными упругими телами. Введем обозначения для параметров материала: $\rho^k$ – плотность, $\lambda^k$ и $\mu^k$ – константы Ламе материала. Динамическое состояние каждой части тела описывается следующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu\Delta u^k(x,t)+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ u^k(x,t)=$$
$$=\rho\ddot{u}^k(x,t),\quad x\in\Omega_k. \qquad (1)$$

В уравнениях (1) $u^k(x, t)$ – вектор перемещений точки $x=(x_1,x_2,x_3)$ в момент времени $t$. Выражение (1) наряду с граничными условиями дает полную систему уравнений.

Рассматривается идеальная несжимаемая жидкость в объеме $\Omega$ с границей $\Gamma$:

$$P=P(\rho),$$

где $P$ – давление, $\rho$ – плотность. Это уравнение называют уравнением состояния жидкости. Кроме него, в систему уравнений, описывающих колебания идеальной сжимаемой жидкости, войдут уравнения Эйлера и неразрывности:

$$\rho\frac{dV}{dt}=-\mathrm{grad}\,P,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho V)=0.$$

В данных уравнениях $V$ – вектор скорости, $t$ – время. Вводя потенциал скорости $\varphi$, запишем следующее уравнение:

$$c^2\Delta\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0,$$

которое в сочетании с краевыми условиями, краевой задачей для (1) и условиями контакта замыкает математическую модель.

## Гранично-элементное моделирование и численные результаты

Метод граничных элементов базируется на численном решении граничных интегральных уравнений (ГИУ). В основе метода ГИУ лежит сведение краевой задачи для дифференциального уравнения движения к интегральному уравнению относительно граничных функций. Применяя к исходным системам уравнений равновесия для упругой среды теорему Бетти и преобразование Лапласа, получим граничное интегральное уравнение:

$$c_{lj}(x)\bar{u}_j(x,p)+\int_S T_{lj}(x,y,p)\bar{u}_j(y,p)\,d_yS=$$
$$=\int_S U_{lj}(x-y,p)\bar{t}_j(y,p)\,d_yS,\quad l=1,2,3,\ x\in\Gamma,$$

где $U_{lj}$ и $T_{lj}$ – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения равновесия. Решением исходной задачи будет вектор-функция перемещений $u(x, t)$, полученная путем применения к решению обратного преобразования Лапласа.

Для акустической среды аналогично получим:

$$\frac{1}{2}p(x,\omega) = \int_\Gamma Q(x,y,\omega)p(y,\omega)d_y\Gamma - $$
$$-\int_\Gamma G(x,y,\omega)\frac{\partial p(y,\omega)}{\partial n(y)}d_y\Gamma, \quad x \in \Gamma,$$

где $Q$ и $G$ – фундаментальные решения уравнения равновесия. Решением исходной задачи будет функция давления $p(x, \omega)$.

Граница аппроксимировалась совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. Для получения дискретного аналога ГИУ в качестве точек коллокации выбирались узлы аппроксимации граничных функций, в которых эти функции неизвестны. Если задача обладает физической симметрией (симметрией тела и граничных условий), то осуществляется учет этой симметрии, использующий отображения основного (повторяемого) фрагмента границы тела на все симметричные ему фрагменты.

Рассмотрены задачи модельного и прикладного назначения. Для задачи о распространении волн от шарового излучателя в неограниченном акустическом пространстве приняты следующие значения параметров: $a = 1.01$ – радиус сферы; $V_0 = 1$ – амплитуда скоростей на границе; $c = 7$ – скорость звука; $\rho = 0.9$ – плотность; $\omega = 0.1$ – частота. Проведенные расчеты показали, что для сходства с аналитическим решением достаточно взять равномерную трехмерную гранично-элементную сетку на поверхности сферы с 27 элементами.

Для задачи о кубе с полостью, заполненной акустической средой принято: $a = 1$ – длина грани куба; $t = 0.1$ – толщина стенки куба; $p = 1$ – равномерное давление, приложенное к наружным граням куба; $\lambda = 2$, $\mu = 1$, $\rho = 1$ – параметры Ламе и плотность упругого тела; $c = 1$, $\rho = 1$ – скорость распространения звука и плотность акустической среды. Давление нарастает в течение 5 с, а затем остается постоянным. Проведенные расчеты показали, что для приемлемой точности решения достаточно взять равномерную трехмерную гранично-элементную сетку на поверхности граней куба с 123 элементами. На рис. 1 приведен график зависимости давления на границе раздела сред.

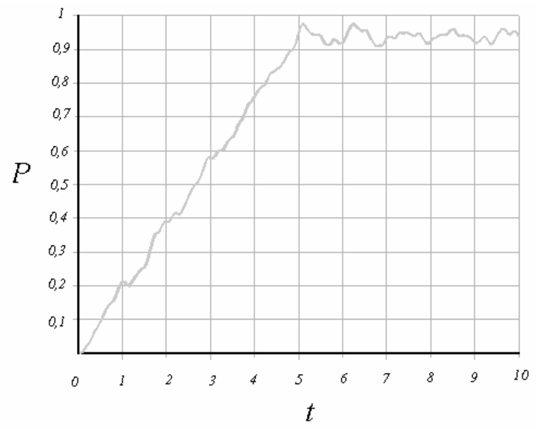


Рис. 1

Решение согласуется с решением, полученным методом конечного элемента в программном комплексе ANSYS.

***Работа выполнена в рамках гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.***

*Список литературы*

1. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

**STUDYING THE DYNAMICS OF ELASTIC BODIES WITH LIQUID FILLERS**

***M.V. Kudin***

Models of elastic and acoustic media are studied. To analyze problems of rigid body-acoustic media contact, a system of boundary integral equations is constructed. A benchmark problem is used to illustrate the potential of using the boundary-element method for obtaining solutions of acoustic problems that have analytical solutions. Examples of numerically analyzing benchmark and applied problems are given. The boundary-element solutions are compared with the finite-element analyses.

*Keywords:* boundary element, boundary integral equations, body with a liquid filler.