

УДК 539.3

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ  
ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ**

© 2011 г.

А.В. Кузнецов<sup>1</sup>, А.А. Белов<sup>2</sup>, А.В. Аменицкий<sup>2</sup>,<sup>1</sup>Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского<sup>2</sup>НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

belov\_a2@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Развивается метод граничных элементов. На основе прямого подхода метода граничных интегральных уравнений рассматривается решение краевых динамических задач трехмерной пороупругости. Представлены примеры численного моделирования.

*Ключевые слова:* среда Био, метод граничных элементов, трехмерные задачи динамики.

Даны постановки основных начально-краевых задач. Рассматриваются системы уравнений относительно неизвестного вектора перемещений упругого скелета и порового давления. Пороупругая среда описывается моделью Био. Специально изучен одномерный случай: приведены выражения для изображений по Лапласу искомым полей и численно получены их оригиналы. Для систем уравнений в частных производных основных краевых задач описано построение матриц фундаментальных и сингулярных решений. Особое внимание уделено полной модели Био. Для упрощенной модели Био и полной модели несжимаемого пороупругого материала дан итоговый вид соответствующих матриц. Представлены примеры численного моделирования фундаментальных решений. Приведено сравнение с соответствующими результатами других авторов. Результаты численных исследований фундаментальных решений, построенные для случаев применения разных моделей пороупругой среды Био, сравниваются с поведением соответствующих компонент для упругого случая. Такое сравнение позволяет продемонстрировать эффект появления медленной волны. Приведены интегральные представления. Построены сингулярные, в смысле Коши, граничные интегральные уравнения (ГИУ) с использованием интегрального преобразования Лапласа и в виде гранично-временных интегральных уравнений. ГИУ, построенные с использованием преобразования Лапласа с параметром  $s$ , имеют вид [1]:

$$\begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 \\ 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s, x) \\ p(s, x) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{aligned} & + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^s(s, y, x) & -Q_j^s(s, y, x) \\ T_i^f(s, y, x) & -Q^f(s, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(s, x) \\ p(s, x) \end{bmatrix} d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^s(s, y, x) & -P_j^s(s, y, x) \\ U_i^f(s, y, x) & -P^f(s, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(s, x) \\ q(s, x) \end{bmatrix} d\Gamma, \\ & i, j = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

где  $u$ ,  $t$  – векторы перемещения и поверхностной силы упругого скелета;  $p$ ,  $q$  – поровое давление и поток. Вид компонент ядер ГИУ можно найти в [1, 2].

Для получения регуляризованного ГИУ фундаментальные и сингулярные решения записываются в виде двух слагаемых: сингулярной и регулярной составляющих, для чего проведено выделение особенностей в этих решениях. Поведение характеризуется тем, что разные компоненты матриц-решений пороупругости имеют разные особенности по координатам:

$$\begin{aligned} \hat{U}_i^f &= O(r^0), \quad \hat{P}_i^s = O(r^0), \\ \hat{U}_{ij}^s &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \{r_i r_j + \delta_{ij}(3-4\nu)\} \frac{1}{r} + O(r^0), \\ \hat{P}^f &= \frac{\rho_f p}{4\pi\beta} \frac{1}{r} + O(r^0), \quad \hat{Q}^f = -\frac{r_n}{4\pi r^2} + O(r^0), \\ \hat{Q}_j^s &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \{ \alpha(1-2\nu)(r_n r_j - n_j) - \\ & - 2\beta(1-\nu)(r_n r_j + n_j) \} \frac{1}{r} + O(r^0), \\ \hat{T}_i^f &= \frac{\rho_f p^2}{8\pi\beta} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} r_i r_j + \right. \\ & \left. + n_i \frac{\alpha + \beta(1-2\nu)}{1-\nu} \right\} \frac{1}{r} + O(r^0), \end{aligned}$$

$$\hat{T}_{ij}^s = \frac{-[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i}r_{,j}]r_{,n}}{8\pi(1-\nu)r^2} + \frac{(1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j)}{8\pi(1-\nu)r^2} + O(r^0).$$

В упругом случае особенности у всех компонент соответствующих матриц-решений одинаковы. Описана гранично-элементная (ГЭ) дискретизация. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности на граничные элементы: четырехугольные и треугольные восьмиузловые биквадратичные элементы. При этом треугольные элементы рассматриваются как вырожденные четырехугольные элементы. Граничные поля интерполируются через узловые значения. Для получения дискретного аналога ГИУ применяется метод коллокации. Дискретные аналоги строятся в виде шаговой по времени схемы метода граничных элементов (МГЭ), а также в виде схемы МГЭ в изображениях по Лапласу с последующим решением проблемы численного обращения этого интегрального преобразования. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. В итоге формируются дискретные аналоги исходных ГИУ в виде систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрены задачи модельного и прикладного назначения. Результаты ГЭ-моделирования действия хевисайдовой силы (Н/м<sup>2</sup>) на торец призматического тела 1×3×1 м с парамет-

рами материала полной модели Био [1]:  $K=8 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $G=6 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>,  $R=4.7 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>,  $k=1.9 \cdot 10^{-10}$  м<sup>4</sup>/Н·с,  $\rho=2458$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha=0.867$ ,  $\phi=0.19$ ,  $\rho_f=1000$  кг/м<sup>3</sup> приведены на рис. 1, 2; ГЭ-схема содержит 504 элемента.

На рис. 3, 4 приведены ГЭ-решения задачи о действии вертикальной хевисайдовой силы (Н/м<sup>2</sup>) на дневную поверхность пороупругого полупространства со следующими параметрами материала полной модели Био [1]:  $E=2.544 \cdot 10^8$  Н/м<sup>2</sup>;  $\nu=0.298$ ;  $k=3.55 \cdot 10^{-9}$  м<sup>4</sup>/Н·с;  $R=1.2 \cdot 10^9$  Н/м<sup>2</sup>;  $\rho=1884$  кг/м<sup>3</sup>;  $\rho_f=1000$  кг/м<sup>3</sup>;  $\phi=0.48$ ;  $\alpha=0.98$  (перемещения на расстоянии 20 м от области нагружения). Поверхность полупространства описывается регулярной ГЭ-сеткой, состоящей из 3088 элементов.

*Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №2222, ГК №1185), при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.*

Список литературы

1. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
2. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Нижегород. ун-т. ННГУ. 2009. Вып. 71. С. 164–171.

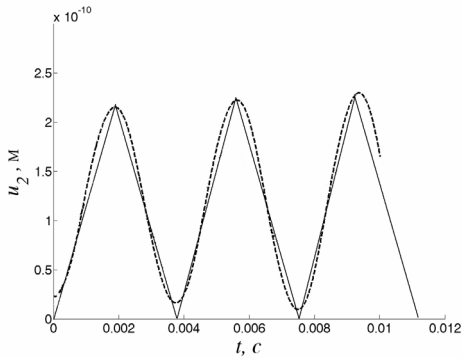


Рис. 1

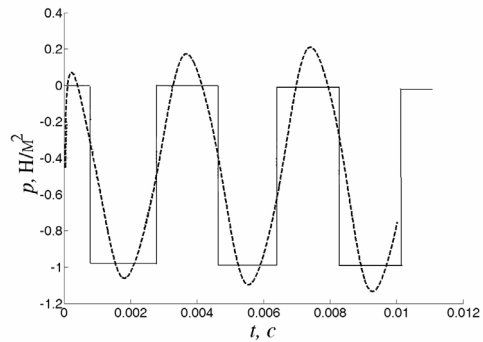


Рис. 2

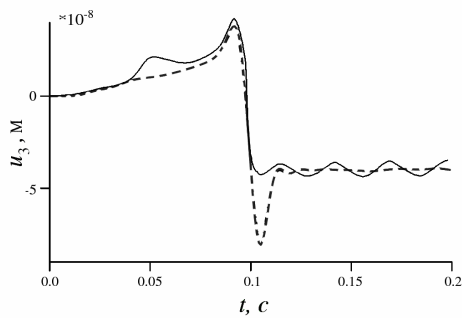


Рис. 3

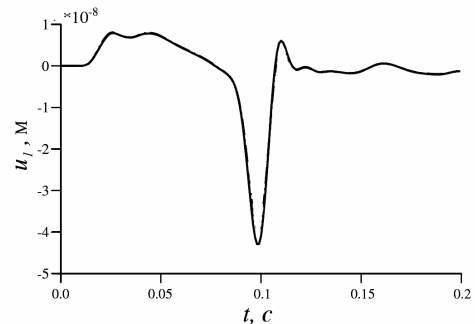


Рис. 4

**NUMERICALLY MODELING THE DYNAMICS OF 3D HOMOGENEOUS POROELASTIC BODIES***A.V. Kuznetsov, A.A. Belov, A.V. Amenitsky*

The paper is dedicated to the development of the boundary element method. Based on the direct approach of the boundary integral equation method, dynamic boundary-value problems of 3D poroelasticity are analyzed. Examples of the numerical modeling are given.

*Keywords:* Biot's medium, boundary elements method, 3D dynamic problems.