

УДК 539.3

МЕТОД ГИУ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТРЕХМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2011 г.

Е.А. Лебедева¹, С.Ю. Литвинчук²

¹Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

²НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

litvinchuk@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Представлены граничные интегральные уравнения и гранично-элементные схемы их решения применительно к динамическим краевым задачам вязкоупругости. Решение организовано в реальном времени. Приведены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: метод граничных элементов, трехмерные задачи динамики, пороупругость.

Рассматривается однородное изотропное вязкоупругое тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через Γ . Введем следующие обозначения для параметров материала: ρ – плотность материала, $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ – функции Ламе материала. Динамическое состояние тела Ω описывается системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu(t) * \Delta u(x, t) + (\lambda(t) + \mu(t)) * \text{grad div } u(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t), \quad (1)$$

где символ «*» означает свертку Стильбеса по времени t . В уравнениях (1) $u(x, t)$ – вектор перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t . Физические и геометрические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda * \varepsilon_{kk} + 2\mu * \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right),$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , $i = \overline{1, 3}$, $j = \overline{1, 3}$ – тензоры напряжений и деформаций.

Пусть вектор перемещений и функции Ламе материала удовлетворяют условиям:

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0, \quad \mu(t - \tau) = 0, \quad \lambda(t - \tau) = 0,$$

где

$$t < \tau, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mu(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = 0.$$

Конкретный вид функций $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ определяется вязкоупругой моделью материала. Будем рассматривать случай пропорциональных функций памяти, тогда достаточно описать физические соотношения, к примеру, для случая $i \neq j$:

$$\sigma_{ij} = 2\mu * \varepsilon_{ij} = 2 \int_0^t G(t - \tau) d\varepsilon_{ij}(\tau), \quad \frac{dG(t)}{dt} = 1 - R(t),$$

$$R(t) \equiv K(t) - \int_0^t K(t - \tau) K(\tau) d\tau + \dots, \quad J(t) = 1 + K(t),$$

где $G(t)$ – функция памяти материала, $R(t)$, $K(t)$ – ядра релаксации и ползучести материала.

Кроме того, пусть отношение значения модуля на бесконечности к значению модуля в начальный момент (для регулярных моделей) определяется параметром $w = G(\infty)/G(0)$.

Применим к исходным уравнениям интегральное преобразование Лапласа:

$$f(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ist} dt,$$

где s – параметр преобразования Лапласа.

В качестве метода решения будем использовать метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [1], в основе которого лежит сведение краевой задачи для дифференциального уравнения движения к интегральному уравнению относительно граничных функций.

Вектор перемещений во внутренних точках области связан с граничными значениями перемещений и усилий:

$$\begin{aligned} \bar{u}_l(x, s) = & \int_{\Gamma} U_{lj}(x, y, s) \bar{t}_j(y, s) d_y S - \\ & - \int_{\Gamma} T_{lj}(x, y, s) \bar{u}_j(y, s) d_y S, \\ & l = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь U_{lj} и T_{lj} – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения (1).

Формула (3) дает следующее ГИУ:

$$c_{lj}(x) \bar{u}_j(x, s) + \int_{\Gamma} T_{lj}(x, y, s) \bar{u}_j(y, s) d_y S =$$

$$= \int_{\Gamma} U_{lj}(x-y, s) \bar{t}_j(y, s) d_y S, \\ l = 1, 2, 3, \quad x \in \Gamma. \quad (4)$$

Интеграл в левой части (4) является сингулярным, т.е. понимается в смысле главного значения по Коши, а $c_{lj}(x)$ – известный коэффициент при внеинтегральном члене. Если в точке x поверхность имеет единственную касательную плоскость, то $c_{lj}(x) = \delta_{lj}/2$. ГИУ (4) позволяет разработать эффективную численную методику для определения неизвестных амплитуд граничных перемещений и поверхностных сил. Решением исходной начально-краевой задачи будет вектор-функция $u(x, t)$, полученная путем применения к решению (3), (4) обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(s) e^{ist} ds. \quad (5)$$

Для численного обращения (5) будем использовать алгоритм, предложенный Дурбином [1], а также метод квадратур свертков [2].

Результаты численных экспериментов представляют собой решение ряда задач модельного и прикладного назначения, среди которых следующие: задача о действии ударной силы на торец призматического тела с жестко закрепленным концом; задача о действии вертикальной силы на поверхность вязкоупругого полупространства; задача о действии вертикальной силы на поверхность полупространства с полостью; задача о реакции защитного корпуса атомной станции теплоснабжения на действие ударной силы.

При решении задачи о действии силы $P(t) = P_0(H(t) - H(t - 0.0085))$, где $P_0 = 1 \text{ Н/м}^2$ на поверхность вязкоупругого полупространства с параметрами материала: $E = 1.38 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$; $\nu = 0.35$; $\rho = 1966 \text{ кг/м}^3$ ($c_1 = 335.64 \text{ м/с}$; $c_2 = 161.24 \text{ м/с}$, $c_R = 150.5 \text{ м/с}$) в качестве точки наблюдения выбиралась точка $(2.3333; 2.3333; 0)$.

На рис. 1 приведены численные результаты для модели Кельвина–Фойгта ($\lambda(\infty) = \lambda$, $\mu(\infty) = \mu$) при разных значениях параметра вязкости (кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – случаю $\beta = 100$; 3 – $\beta = 1$; 4 – $\beta = 0.1$; 5 – $\beta = 0.01$).

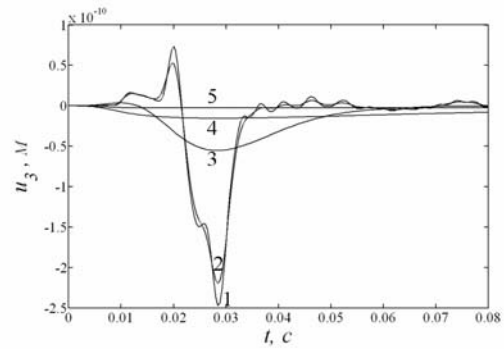


Рис. 1

На рис. 2 приведены численные результаты для модели стандартного вязкоупругого тела при разных ($\mu(\infty) = \mu$, $\lambda(\infty) = \lambda$, $\lambda(\infty)/\lambda(0) = \mu(\infty)/\mu(0) = 0.0625$) значениях параметра вязкости γ (кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $\gamma = 100$; 3 – $\gamma = 1$; 4 – $\gamma = 0.1$; 5 – $\gamma = 0.01$).

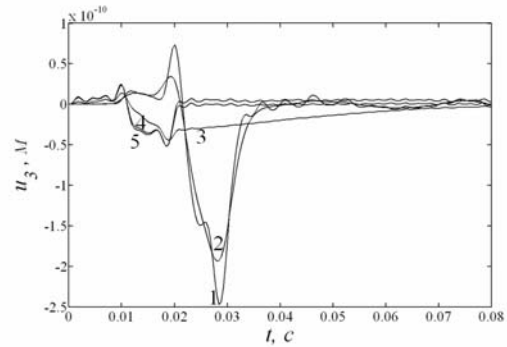


Рис. 2

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (ГК №2222), при поддержке РФФИ (проект №10-08-01017-а) и гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ НШ-4807.2010.8.

Список литературы

1. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
2. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

THE BIE METHOD IN BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF 3D DYNAMIC VISCOELASTICITY

E.A. Lebedeva, S.Yu. Litvinchuk

Boundary integral equations and boundary-element schemes for analyzing them as applied to dynamic boundary-value problems of viscoelasticity are presented. The analysis is arranged in real time. The numerical experiments are presented.

Keywords: boundary elements method, 3D dynamic problems, porous elasticity.