

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УДАРНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОРТОТРОПНОЙ МИШЕНИ

© 2011 г.

А.А. Локтев

Московский государственный строительный университет

prtlokt@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется динамический контакт ударника сферической формы и ортотропной пластинки, обладающей криволинейной анизотропией и предварительно-напряженной продольной силой и двумя моментами. Динамическое поведение мишени описывается волновыми уравнениями, учитывающими поперечный сдвиг и инерцию вращения поперечных сечений и позволяющими моделировать процесс распространения упругих волн после удара. В качестве метода решения этих уравнений используется асимптотический метод разложения неизвестных величин в ряды по полиномам Лежандра и ряды Лорана вблизи искомой точки. В задаче определяются динамические характеристики взаимодействия и исследуется влияние на них предварительного напряжения мишени. Результаты решения представлены в виде аналитических выражений и графических зависимостей. Исследуется влияние предварительного напряжения пластинки на динамический прогиб и контактную силу в месте взаимодействия.

Ключевые слова: динамический контакт, пластинка типа Уфлянда–Миндлина, асимптотический метод разложений, упругие волны, динамический прогиб, контактная сила.

Рассматривается круглая шарнирно-опертая по контуру ортотропная пластинка, перемещения точек которой определяются из уравнений типа Уфлянда–Миндлина [1], записанных в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{c_2}{c_1} \varphi + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} - \\ & - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{12c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - \varphi \right) = \\ & = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + M + \frac{M_r \Delta_r u}{c_1 h \rho}, \\ & \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial w}{r \partial r} - \frac{\varphi}{r} \right) + \\ & + \frac{c_4}{c_1} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial \psi}{r \partial \theta} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + q_1 + \frac{N \Delta_r w}{c_1 h^2 \rho}, \\ & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{u}{r^2} + \frac{c_2 \sigma_r + c_3}{c_1 r} \times \\ & \times \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} - \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{N \Delta_r u}{c_1 h^2 \rho} + \frac{M_r \Delta_r \varphi}{c_1 \rho}, \\ & \frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \times \\ & \times \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{M_z \Delta_\theta \psi}{c_1 \rho}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} \right) + \frac{c_2}{c_1 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\sigma_\theta + c_3}{c_1 r} \times \\ & \times \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{c_2 + c_3}{c_1 r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{12c_5}{c_1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \psi \right) = \\ & = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{M_z \Delta_\theta v}{c_1 h \rho}, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} & \tau = \frac{t \sqrt{c_1}}{h}, \quad w = \frac{w}{h}, \quad u = \frac{u}{h}, \quad v = \frac{v}{h}, \quad r = \frac{r}{h}, \\ & c_1 = \frac{E_r}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}, \quad c_2 = \frac{E_\theta}{(1 - \sigma_r \sigma_\theta) \rho}, \quad c_3 = \frac{G_{r\theta}}{\rho}, \\ & c_4 = \frac{K G_{rz}}{\rho}, \quad c_5 = \frac{K G_{\theta z}}{\rho}, \quad q_1 = \frac{q h}{\rho c_1}, \\ & M = \frac{12 q R_1 \cos \alpha_1}{\rho h c_1} = \frac{12 R_1 \cos \alpha_1}{h^2} q_1, \quad D_r = \frac{h^3}{12} B_r, \\ & D_\theta = \frac{h^3}{12} B_\theta, \quad D_k = \frac{h^3}{12} B_k, \quad C_r = h B_r, \\ & C_\theta = h B_\theta, \quad C_k = h B_k, \quad D_{r\theta} = D_r \sigma_\theta + 2 D_k, \\ & B_r = \frac{E_r}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \quad B_\theta = \frac{E_\theta}{1 - \sigma_r \sigma_\theta}, \\ & B_k = G_{r\theta}, \quad E_r \sigma_r = E_\theta \sigma_\theta, \quad k = 5/6, \\ & D_r, D_\theta \text{ и } C_r, C_\theta - \text{соответственно жесткости изгиба и растяжения-сжатия для направлений } r, \theta; \end{aligned}$$

D_k – жесткость кручения; C_k – жесткость сдвига; E_r, E_θ и σ_r, σ_θ – модуль упругости и коэффициент Пуассона для направлений r, θ ; $G_{rz}, G_{\theta z}$ – модуль сдвига в плоскостях rz и θz соответственно; $w(r, \theta)$ – нормальное перемещение срединной плоскости, $u(r, \theta)$ и $v(r, \theta)$ – тангенциальные перемещения срединной поверхности соответственно по координатам r, θ ; $\varphi(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ – произвольные искомые функции координат r, θ ; ρ – плотность, h – толщина пластинки, q – нагрузка, R_1 – радиус сферического ударника,

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad \Delta_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

N – внешняя продольная сила, действующая по радиальному направлению, M_r – внешний изгибающий момент, вектор которого направлен вдоль радиуса, M_z – внешний крутящий момент, вектор которого направлен вдоль нормали к срединной плоскости мишени.

Для определения скоростей упругих волн с учетом внешних сил продифференцируем уравнения движения (1) k раз по времени, запишем их в скачках неизвестных величин на волновой поверхности и для перехода от производных по поверхностным координатам к производным по времени воспользуемся условием совместности [2]

$$G \left[\frac{\partial x_{,(k)}}{\partial \alpha} \right] = -[x_{,(k+1)}] v_\alpha + \frac{\delta[x_{,(k)}]}{\delta t} v_\alpha, \quad (2)$$

где G – нормальная скорость расширения фронта волны; $[x_{,(k)}]$ – скачки производных k -го порядка по времени t от искомой функции x на волновой поверхности Σ , x – принимает значения φ, ψ, w, u, v ; величина α принимает значения r, θ ; v_α ($v_r = \cos \varphi, v_\theta = \cos \theta$) – компоненты вектора нормали к волновой поверхности, $\delta/\delta t$ – δ -производная по времени. Используя процедуру, описанную в

[2], из полученных уравнений при $k = -1$ приходим к системе относительно перемещений и скоростей волн. Результат решения данной системы можно представить в виде графических зависимостей $G^{(x)} = f(N, M_r, M_z)$.

Для определения контактной силы и динамического прогиба пластинки в месте ударного взаимодействия запишем систему уравнений (1) в пространстве Лапласа. Для ее решения представим неизвестные перемещения и нагрузку $q(\tau, r, \theta)$ от сосредоточенной силы взаимодействия в месте контакта $P(t)$ в виде разложений в ряды по полиномам Лежандра [3], которые удовлетворяют граничным условиям:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} x_{2n,m} P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta), \\ \tilde{q}_1 &= \frac{P(p)}{\pi R_c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (4n+3) P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r_1}{2R} \right) \times \\ &\quad \times P_{2n+1} \left(\cos \frac{\pi r}{2R} \right) \cos(m\theta), \end{aligned} \quad (3)$$

где r_1 – координата точки, в которой происходит динамический контакт, тильда над переменной показывает, что данная величина используется в пространстве Лапласа.

Для определения коэффициентов рядов (3) воспользуемся их представлением вблизи искомой точки в виде рядов Лорана

$$x_{2n,m} = x_{2n,m}^0 \varepsilon^0 + x_{2n,m}^1 \varepsilon^1 + x_{2n,m}^2 \varepsilon^2 + x_{2n,m}^3 \varepsilon^3,$$

в которых $\varepsilon = p^{-2}$.

После подстановки выражений для прогиба мишени в заданной точке, т.е. при фиксированных значениях координат r, θ , и местного смятия в уравнение движения ударника после начала контакта с учетом граничных и начальных условий получим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение относительно контактной силы, кото-

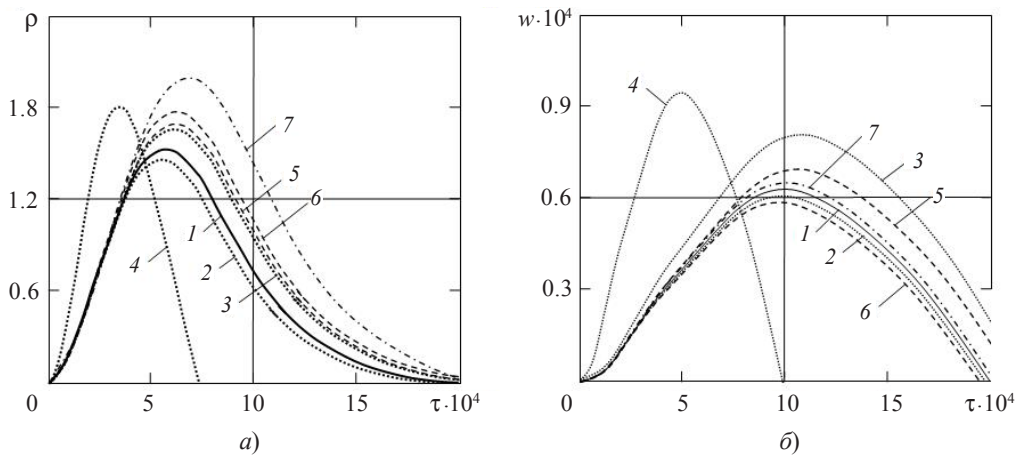


Рис. 1

рое можно решить, используя итерационную схему [3]. Результаты решения представлены на рис. 1 в виде графических зависимостей контактной силы (рис. 1а) и динамического прогиба (рис. 1б) от времени для различных значений предварительных усилий.

Кривая 1 построена при отсутствии предварительного напряжения пластинки, кривые 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответствуют следующим значениям начальных внешних усилий: $N/h^2c_1\rho = -20$, $N/h^2c_1\rho = 20$, $N/h^2c_1\rho = 600$, $M_r/h^3c_1\rho = 20$, $M_r/h^3c_1\rho = -20$, $M_z/h^3c_1\rho = 20$.

Список литературы

1. Локтев А.А. Упругий поперечный удар по круглой ортотропной пластинке // Письма в журнал технической физики. 2005. Т. 31. Вып. 18. С. 4–9.
2. Локтев А.А. Динамический контакт ударника и упругой ортотропной пластинки при наличии распространяющихся термоупругих волн // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 4. С. 652–658.
3. Бирюков Д.Г., Кадомцев И.Г. Динамический упругопластический контакт ударника и сферической оболочки // Прикладная механика и техническая физика. 2002. Т. 43, №5. С. 171–175.

INFLUENCE OF PRE-STRESS ON THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF IMPACT EXCITATION OF A SOLID BODY AND AN ORTHOTROPIC TARGET

A.A. Loktev

The dynamic contact of a spherical indenter and an orthotropic plate is investigated. The plate possesses curvilinear anisotropy and undergoes pre-stressing longitudinal force together with two moments. The dynamic behaviour of the target is described by wave equations which take into account the transverse shear and rotary inertia of the cross sections and allow for modelling the process of propagation of elastic waves after the impact. The asymptotic method of the series expansion of unknown quantities in terms of Legendre polynomial and Laurent series in the vicinity of the sought point is used as a method of solution. The dynamic characteristics of the interaction are determined and the influence of the preloaded target on these dynamic characteristic is investigated.

Keywords: dynamic contact, Uflyand-Mindlin plate, asymptotic method of the expansion, elastic waves, dynamic displacement, contact force.