Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (4), с. 1582–1584

УДК 539.3

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНИКИ

***В.А. Ломазов*[1], *В.И. Ломазова*[2]**

[1]Белгородская государственная сельскохозяйственная академия
[2]Белгородский госуниверситет

vlomazov@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается проблема выбора (построения) математической модели для исследования связанных термоупругих процессов в неоднородных анизотропных средах. Предлагается подход, основанный на выделении подзадач структурного и параметрического синтеза, первая из которых решается эволюционными методами, а вторая – методами решения обратных задач математической физики.

Ключевые слова: термоупругие процессы, неоднородные анизотропные среды, математическая модель, обратная задача.

Сложность решения задач термомеханики неоднородных анизотропных тел обусловливает необходимость выбора (построения) математических моделей, позволяющих минимизировать затраты на их использование при сохранении требуемого уровня адекватности описания. Математическую модель процесса можно представить в виде: $M = <S, C>$, где S – структура модели, учитывающая вид и взаимосвязи между входящими в модель соотношениями, а C – параметры модели, представляющие собой коэффициенты (в данном случае зависящие от пространственных координат) этих соотношений.

Рассматривая основные линейные модели, описывающие нестационарные термоупругие процессы в неоднородных анизотропных средах, введем векторный параметр $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4, \kappa_5)$, каждая компонента которого может принимать значение либо 1, либо 0, либо степень малого параметра, что отражает учет, неучет или степень учета в рамках различных моделей следующих эффектов: κ_1 – инерция теплового потока (конечности скорости распространения тепла); κ_2 – термоупругая диссипация (зависимость тепловых полей от скорости изменения объемных деформаций); κ_3 – зависимость полей деформаций и напряжений от градиентов температур; κ_4 – нестационарность полей деформаций и напряжений; κ_5 – нестационарность тепловых полей.

Рассмотрим неоднородное анизотропное тело, первоначально имеющее температуру T_0 и находящееся в недеформированном и ненапряженном состоянии. Для описания дальнейшего термоупругого состояния тела будем пользоваться прямоугольной декартовой системой координат $x = (x_1, x_2, x_3)$. Под действием термосиловых нагружений (в том числе массовых сил и тепловых источников, имеющих распределения F_i, $i = 1, 2, 3$ и F_0 соответственно) в теле могут возникнуть перемещения u_i ($i = 1, 2, 3$), деформации e_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), напряжения σ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), тепловые потоки q_i ($i = 1, 2, 3$), а также может произойти изменение температуры θ. Все эти величины в дальнейшем полагаются достаточно гладкими функциями пространственных координат и времени t. Вводя компоненты вектора модели в известные соотношения обобщенной термомеханики [1] (обобщенный закон Фурье, уравнение теплового баланса, уравнения движения (равновесия), соотношения Коши и обобщенный закон Дюамеля – Неймана), получим

$$\kappa_1 \tau \dot{q}_i + q_i + K_{ij}\theta,_j = 0,$$
$$\kappa_5 C_v \dot{\theta} + q_j,_j + \kappa_2 T_0 \beta_{ij} \dot{e}_{ij} = f_0, \quad \kappa_4 \rho \ddot{u}_i - \sigma_{ij},_j = f_i,$$
$$e_{ij} - (u_i,_j + u_j,_i)/2 = 0,$$
$$\sigma_{ij} - C_{ijkl} e_{kl} + \kappa_3 \beta_{ij} \theta = 0, \quad i, j, k, l = 1,2,3.$$

При записи соотношений термоупругости использовались общепринятые обозначения характеристик среды: C_v – удельная теплоемкость при постоянной деформации; β_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – коэффициенты термического объемного расширения; C_{ijkm} ($i, j, k, m = 1, 2, 3$) – изотермические коэффициенты жесткости анизотропной среды; K_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) – коэффициенты теплопроводности анизотропной среды; τ – время релаксации теплового потока; ρ – плотность. Точки над величинами означают частные производные по времени

t, индекс после запятой – частную производную по соответствующей пространственной координате. По повторяющемуся индексу производится суммирование.

Структурный синтез модели термомеханики

Предполагается, что наиболее полная (и сложная для использования) из рассматриваемых моделей, соответствующая набору коэффициентов $\kappa_i = 1$ ($i = 1, \ldots, 5$), модель M^1 является адекватной. Предполагается также, что проверка адекватности произвольной модели M^* из рассматриваемого класса может быть сведена к проверке выполнения заданной точности аппроксимации решений, полученных на основе M^1, решениями, полученными на основе M^* с использованием процедуры из [2]:

1) генерируется набор тестовых задач T_1, $T_2, \ldots, T_V$, решениями которых в рамках модели M^* будут функции $\{u_i, e_{ij}, \sigma_{ij}, q_i, \theta\}^v$ ($i, j = 1, 2, 3$; $v = 1, \ldots, V$);

2) полученные решения подставляются в соотношения, соответствующие модели M^1, и вычисляются невязки;

3) полученные невязки приводятся к безразмерному виду и нормируются, после чего они умножаются на весовые коэффициенты (найденные в результате обработки экспертных оценок), а затем для модели M^* определяется средняя (по набору тестовых задач) невязка δ^*;

4) проверяется выполнение для полученной средней невязки δ^* ограничения, обеспечивающего заданную допустимую точность аппроксимации δ^e – const: $\delta^* \leq \delta^e$.

Сложность использования модели можно оценить по значению вектора κ. Однако учет разных факторов не одинаков по сложности и зависит от особенностей процесса, типа решаемой задачи и используемого метода ее решения, а также требуемой точности решения. Поэтому в качестве критерия сравнительной сложности модели предлагается использовать взвешенную сумму компонент вектора κ.

Выбор (одной или нескольких) наиболее удобных для использования моделей целесообразно производить, основываясь на процедуре генетической селекции, поскольку она позволяет эффективно находить удовлетворительные решения многоэкстремальных оптимизационных задач большой размерности и обладает возможностью использования параллельных вычислений, что отвечает перспективным тенденциям развития компьютерных технологий. Для селекции моделей предлагается следующая (основанная на стандартном генетическом алгоритме [3]) процедура:

1) кодирование моделей в виде бинарных хромосом, определяемых коэффициентами κ_i ($i = 1, \ldots, 5$), и построение нормализованной функции приспособленности на основе критерия сложности;

2) построение начальной популяции моделей случайным выбором из класса моделей, описываемых соотношениями;

3) турнирный (или рулеточный) отбор родительских пар;

4) применение генетических операторов скрещивания и мутации для получения новой популяции моделей;

5) проверка стандартных условий останова эволюционного процесса;

6) определение в последней популяции нужного числа наименее сложных моделей, удовлетворяющих условию заданной точности аппроксимации.

Как и любой эвристический метод случайного поиска, предлагаемая процедура генетической селекции моделей не гарантирует нахождения оптимального решения, но представляется более эффективной, чем гарантирующий точное решение метод полного перебора.

Параметрический синтез модели термомеханики

На предыдущем этапе предполагалось, что коэффициенты уравнений термомеханики являются известными константами, что соответствует пространственной однородности термоупругой среды. Этап параметрического синтеза состоит в уточнении модели за счет допущения возможной (подлежащей дальнейшему определению) зависимости свойств среды (коэффициентов соотношений термомеханики) от пространственных координат. Нахождение этой зависимости по результатам измерения на поверхности тела отдельных характеристик, специальным образом инициированных в рассматриваемом теле, термомеханических процессов представляет собой коэффициентную обратную задачу для уравнений термомеханики. Такого рода классически некорректные (по Ж. Адамару) задачи для различных областей и в рамках моделей термомеханики (с различным структурами) рассмотрены, в частности, в [4] и в последующих работах этих авторов.

Построение математических моделей термомехнических процессов в рамках предлагаемого подхода представляет собой достаточно трудоемкую процедуру, которая, тем не менее, является оправданной в случае необходимости дальнейшего многократного использования построенных моделей для решения однотипных задач в рамках автоматизации научных исследований.

Список литературы

1. Бардзокас Д.И., Зобнин А.И., Сеник Н.А., Фильштинский М.Л. Математическое моделирование в задачах механики связанных полей. Т. I. М.: URSS, 2010. 312 с.

2. Ломазов В.А., Ломазова В.И. Формализация выбора математических моделей связанных полей при автоматизации исследований // Информационные системы и технологии. 2010. №3. С. 79–86.

3. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. М.: Физматлит, 2010. 368 с.

4. Ломазов В.А., Немировский Ю.В. Математическая модель проблемы диагностики термоупругой среды // Прикл. математика и механика. 1986. Т. 50, №2. С. 284–292.

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS FOR SOLVINGTHE PROBLEMS OF THERMOMECHANICS

V.A. Lomazov, V.I. Lomazova

The problem of choosing (constructing) a mathematical model to study the coupled thermoelastic processes in heterogeneous anisotropic media is considered. The approach is based on the allocation of subtasks of structural and parametric synthesis, the first of which is solved by evolutionary methods, and the second – the methods of solving inverse problems of mathematical physics.

Keywords: thermoelastic processes, heterogeneous anisotropic media, mathematical model, evolutionary methods, inverse problem.