ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

УДК 532.59.032

СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

© 2011 г.

А.А. Абрашкин, Ю.П. Бодунова

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

abrash@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Обсуждаются проблемы асимптотической теории слабонелинейных поверхностных волн в вязкой жидкости. Используются лагранжевы переменные. Для стоячих волн на глубокой воде проанализированы решения первых двух приближений по малому параметру крутизны волн. В случае когда обратная величина числа Рейнольдса равна квадрату крутизны, получено эволюционное уравнение для амплитуды огибающей волнового пакета. Показано, что оно имеет вид нелинейного уравнения Шредингера с линейным затуханием. Построено и проанализировано решение для линейных пространственных периодических волн в бесконечно глубокой жидкости. Найдено выражение для усредненной (на длине волны) скорости горизонтального дрейфа жидких частиц в квадратичном приближении по малой крутизне волн.

Ключевые слова: вязкость, лагранжевы координаты, волновой пакет.

Классическая теория волн на воде исходит из предположения об идеальности жидкости. Учет влияния вязкости на распространение волн является сложной математической проблемой. Диссипация существенна в тонком приповерхностном слое, что не позволяет перенести формулировку граничного условия с нестационарной свободной границы на уровень невозмущенной поверхности жидкости, как это делается для волн в идеальной жидкости. Однако эту трудность математического описания волн можно обойти, если воспользоваться переменными Лагранжа. Вертикальная координата, соответствующая свободной поверхности, при лагранжевом описании полагается равной нулю, и формулировка граничного условия не вызывает трудностей [1].

Рассматриваются вопросы построения асимптотической теории, описывающей распространение нелинейных волн различного типа – стоячих, волнового пакета и бегущих периодических волн. Для каждого типа характерны свои особенности математического описания.

1. Стоячие волны

Жидкие частицы совершают в стоячих волнах только колебательные движения. Выражения для их смещений относительно своего первоначального положения ищутся в лагранжевых координатах в виде ряда по малому параметру крутизны волны $\varepsilon = kA$, где k – волновое число, а A – амплитуда волны. Получены решения для первых двух приближений. Найдено распределение завихренности в тонком приповерхностном слое. Вне его построенное решение совпадает с аналогичными выражениями для потенциальных стоячих волн [2].

2. Волновой пакет

Для исследования динамики волнового пакета уравнения движения вязкой жидкости в форме Лагранжа записываются в комплексной форме. Они имеют следующий вид:

$$[\overline{W}, W] = W_q \overline{W}_b - W_b \overline{W}_q = 2i; \quad W = X + iY,$$
$$\overline{W} = X - iY; \quad q = a + \sigma t; \qquad (1)$$

$$W_{tt} + 2\sigma W_{tq} + \sigma^2 W_{qq} = -i + i[p, W] + \frac{1}{2\,\mathrm{Re}} \times$$
$$\times \{[W, [\overline{W}, W_t + \sigma W_q]] + [\overline{W}, [W, W_t + \sigma W_q]]\}. \quad (2)$$

Здесь X, Y – координаты жидких частиц; a, b – их лагранжевы координаты, t – время, p – давление, черта – знак комплексного сопряжения. Все функции безразмерные:

$$W \to W/L; \quad q \to q/L; \quad t \to t\sigma/L; \quad p \to p/\rho\sigma^2,$$

где ρ – плотность, L и σ – обратное волновое число k и фазовая скорость линейной волны соответственно, $\mathrm{Re} = \sigma L/\nu$ – число Рейнольдса, ν – вязкость.

Система (1), (2) получена из уравнений Навье – Стокса в традиционной форме Лагранжа путем замены переменных [1]. Она дополняется граничными условиями непротекания на дне ($Y_t + \sigma Y_q \to 0,\ b \to -\infty$) и отсутствия вязких напряжений на свободной поверхности $b = 0$:

$$T_{ik}n_k = -p_0 n_i; \quad \mathbf{n}\{n_x, n_y\} =$$

$$= \mathbf{n}\{-Y_q/(X_q^2+Y_q^2)^{1/2},\ X_q/(X_q^2+Y_q^2)^{1/2}\};$$

$$T_{xx} = -p + \frac{1}{2i\,\mathrm{Re}}([W_t + \sigma W_q, W - \overline{W}] - \text{к.с.}); \quad (3)$$

$$T_{xy} = -\frac{1}{2\,\mathrm{Re}}([W_t + \sigma W_q, W] + \text{к.с.}); \quad T_{yy} =$$

$$= -p - \frac{1}{2i\,\mathrm{Re}}([W_t + \sigma W_q, W + \overline{W}] - \text{к.с.}); \ p_0 = p|_{b=0}.$$

Система (1)–(3) решается с помощью метода многих масштабов. Величина, обратная числу Рейнольдса, выбирается равной квадрату малого параметра. Получены выражения для координат траектории жидких частиц для первых трех приближений. Они совпадают с аналогичными выражениями для волнового пакета в идеальной жидкости, но должны удовлетворять вязкому граничному условию на свободной поверхности. Эволюционное уравнение для амплитуды пакета имеет вид:

$$iA_\tau + \frac{1}{2}|A|^2 A + \frac{1}{8}A_{\xi\xi} + iA = 0; \quad \tau = \varepsilon^2 t;$$

$$\xi = \varepsilon\left(q - \frac{1}{2}t\right).$$

Численно проанализировано затухание солитона огибающей.

3. Пространственные бегущие волны

В прогрессивных волнах частицы, помимо колебательной составляющей скорости, имеют еще и дрейфовую. Наличие дрейфа частиц существенно осложняет построение теории возмущений. Для плоской волны выражение для усредненной дрейфовой скорости определил Лонге-Хиггинс [3]. Получено обобщение этой формулы на случай пространственных поверхностных волн. Обсуждается возможный вид решения задачи в квадратичном приближении, описывающем как колебательное, так и дрейфовое движение жидких частиц.

Список литературы

1. Абрашкин А.А., Якубович Е.И. Вихревая динамика в лагранжевом описании. М.: Физматлит, 2006. 175 с.

2. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.

3. Longuet-Higgins M.S. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245, No. 903. P. 535–581.

WEAKLY NONLINEAR SURFACE WAVES IN A VISCOUS FLUID

A.A. Abrashkin, Yu.P. Bodunova

The problems of the asymptotic theory of weakly nonlinear surface waves in a viscous fluid are discussed. Lagrange variables are used. For standing waves on deep water, the solutions obtained in the first- and second-order approximations in a small parameter – wave steepness – are analyzed. The evolution equation for the amplitude of wave packet envelope is obtained where the inverse Reynolds number is equal to the squared steepness. It is shown that this is a nonlinear Schredinger equation with linear dissipation.

Keywords: viscosity, Lagrange coordinates, wave packet.