Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 1946–1947

УДК 531.36

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО ЦИКЛА В ЗАДАЧЕ О СВОБОДНОМ ГИРОСКОПЕ С ЦИРКУЛЯРНЫМИ СИЛАМИ

С.А. Агафонов, Т.В. Муратова

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва

tamura@bk.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, установленном на неподвижном основании. Сухое трение в опорах ротора приводит к появлению циркулярных сил. Вследствие потери устойчивости стационарного движения ротора возникает предельный цикл (бифуркация Андронова – Хопфа).

Ключевые слова: предельный цикл, сухое трение, потеря устойчивости, функция Ляпунова.

Рассматривается гироскоп в кардановом подвесе, установленном на неподвижном основании. Углы α, β определяют повороты наружной и внутренней рамок относительно основания. Опоры ротора предполагаются упругими с сухим трением. В [1] предложена модель, объясняющая возникновение незатухающих колебаний ротора с нутационными частотами. Причиной колебаний является потеря устойчивости стационарного движения ротора от действия циркулярных сил, возникающих при учете сухого трения в опорах. При большом кинетическом моменте ($H \to \infty$) система уравнений предельной механической системы имеет вид:

$$\begin{aligned} &\ddot{\alpha} + b_0\dot{\alpha} + c\alpha + \mu_0\beta = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\alpha}}, \\ &\ddot{\beta} + b_0\dot{\beta} + c\phi - \mu_0\alpha = -\frac{\partial R}{\partial \dot{\beta}}, \end{aligned} \tag{1}$$

где c – угловая жесткость опор ротора, b_0 – коэффициент диссипации. Параметр μ_0 характеризует действие циркулярных сил. В (1) учитывается нелинейная диссипация. Функция Рэлея $R = \gamma(\alpha^2\dot{\alpha}^2 + \beta^2\dot{\beta}^2)/2,\ \beta > 0$.

Систему (1) можно привести к безразмерной форме введением безразмерного времени $\tau = \sqrt{c}t$:

$$\begin{aligned} &\alpha'' + b\alpha' + \alpha + \mu\beta + \gamma\alpha^2\alpha' = 0, \\ &\beta'' + b\beta' + \beta - \mu\alpha + \gamma\beta^2\beta' = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $b = b_0/\sqrt{c},\ \mu = \mu_0/c$.

При $\mu = b$ характеристическое уравнение линейной системы (2) ($\gamma = 0$) имеет пару чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$, $\lambda_{3,4} = -b \pm i$. Стационарное движение $\alpha = \beta = 0$ теряет устойчивость при $\mu > b$ с рождением предельного цикла. Для этого необходимо, чтобы корни $\lambda_{1,2} = \pm i$ пересекли мнимую ось с ненулевой скоростью. Вычисления приводят к оценке

$$\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\mu}\right)_{\mu=b} = \frac{1}{1+b^2} > 0.$$

Задача об устойчивости сводится к анализу критического случая пары чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i$. Опуская вычисления, приведем выражение для первой ляпуновской величины:

$$L_1 = -\gamma\frac{b^4 + 3b^2 + 4}{8(b^2+4)^3}.$$

Поскольку $L_1 < 0$, то при $\mu = b$ стационарное движение асимптотически устойчиво, а предельный цикл возникает после перехода через значение $\mu = b$ и является орбитально асимптотически устойчивым [2]. Следует отметить, что граница области устойчивости $\mu = b$ является безопасной [3].

Список литературы

1. Журавлев В.Ф. Нутационные автоколебания свободного гироскопа // Изв. РАН. МТТ. 1992. №6. С. 13–16.
2. Мареден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее применения. М.: Мир, 1980. 368 с.
3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

ANDRONOV – HOPF BIFURCATION IN THE NON-CONSERVATIVE PROBLEM OF A FREE GYRO

S.A. Agafonov, T.V. Muratova

A gimbals-suspended gyro installed on an immovable base is considered. The dry friction is taken into account. This friction leads to the appearance of circular forces. Beside the linear dissipative forces, nonlinear forces act on the system. The action of circular forces leads to the loss of stability of the stationary motion of the rotor resulting in the occurrence of the limit cycle (Andronov – Hopf bifurcation).

Keywords: limit cycle, dry friction, stability loss, Lyapunov value.