

УДК 539.3

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОЯ

© 2011 г.

*С.М. Айзикович, А.С. Васильев, С.С. Волков*

Донской государственной технический университет, Ростов-на-Дону

fenix\_rsu@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Предлагается эффективный метод решения осесимметричных статических контактных задач теории упругости для непрерывно-неоднородного (функционально-градиентного) слоя сложной структуры, позволяющий получить приближенное решение задачи в аналитическом виде. Построенное решение является асимптотически точным как для больших, так и для малых значений характерного геометрического параметра задачи.

*Ключевые слова:* непрерывно-неоднородный слой, функционально-градиентная среда, сложная структура, контактная задача, асимптотически точное решение.

Решение контактных задач для функционально-градиентного полупространства с произвольным законом изменения неоднородности по глубине было построено в исследованиях С.М. Айзиковича, В.М. Александрова, А.С. Васильева и др. двухсторонним асимптотическим методом [1–6].

Неоднородные покрытия с непрерывно изменяющимися по глубине упругими свойствами (функционально-градиентные покрытия) дают возможность снизить концентрацию напряжений в зоне сопряжения покрытия с подложкой и перераспределить контактные напряжения под штампом [4, 5].

Развитые ранее математические модели слоистых материалов недостаточно точно описывают функционально-градиентные покрытия. Наблюдаются как количественные, так и качественные отличия в поведении функционально-градиентных материалов по сравнению с однородными или слоистыми [5].

на упругой полуплоскости в случае плоской постановки задачи.

Среди неоднородных покрытий с плавно изменяющимися по глубине упругими свойствами особый интерес представляют покрытия, у которых градиент изменения упругих свойств меняет знак по одной из координат. Так, например, это покрытия, жесткость которых на поверхности максимальна и уменьшается с глубиной до некоторого значения, а затем, наоборот, увеличивается по мере приближения к подложке (покрытия с немонотонными законами изменения по глубине упругих свойств).

Для задачи кручения предполагается, что модуль сдвига изменяется по глубине по закону:

$$G_i(z) = \begin{cases} G^0 f_i(z), & -H < z \leq 0, \\ G^0 G^S, & -\infty \leq z \leq -H, \end{cases} \quad i = 1, \dots, 5.$$

Здесь  $G^0$  – некоторая постоянная,  $f_i(z)$  изменяется по одному из законов, изображенных на рис. 1.

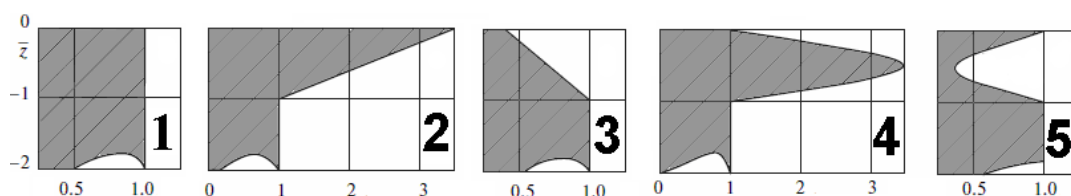


Рис. 1

Настоящее исследование является естественным развитием [6, 7], где было построено решение контактной задачи для слоя конечной толщины в зависимости от характерных геометрических параметров. В недавнем исследовании [8] рассмотрена задача для мягкого однородного слоя

Предполагается, что на границе покрытие–подложка модуль сдвига имеет скачок свойств в 10, 100, 1000 раз, т.е.  $G^S = 10, 100, 1000$ . Для задачи о вдавлении рассматривается аналогичное изменение модуля Юнга.

Задачи решаются методом интегральных пре-

образований и сводятся к решению интегральных уравнений. Излагается метод численного построения трансформант ядер этих интегральных уравнений, и исследуются их свойства. На основании изучения этих свойств доказывается возможность аппроксимации трансформант ядер некоторыми аналитическими выражениями. Предлагается простой эффективный алгоритм построения дробно-рациональной функции, аппроксимирующей трансформанту ядра.

Доказывается, что построенное решение является асимптотически точным как для больших, так и для малых значений характерного геометрического параметра задачи.

Метод позволяет с единых позиций изучить смешанные задачи теории упругости как с фиксированной, так и с неизвестной заранее зоной контакта.

Аналитический вид решений обеспечивает возможности их широкого использования для оценки как механических (функции жесткости), так и защитных свойств композитных функционально-градиентных покрытий жестких оснований.

Получены максимально простые приближенные инженерные формулы для расчета механических характеристик задачи, позволяющие уловить качественные отличия слоистого и функционально-градиентного слоя. Рассматриваются характерные примеры законов неоднородности, анализируется точность полученных приближенных решений. Результаты расчетов приводятся не только в зоне смены граничных условий (на гра-

ницах), но и внутри материала, что имеет важное значение для трибологов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ (№11-08-91168-ГФЕН\_а), АВЦП 2.1.2/10063, ГК №11.519.11.3015, 11.519.11.3028.*

#### Список литературы

1. Александров В.М. О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, №1. С. 55–58.
2. Айзикович С.М. Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
3. Айзикович С.М. Асимптотическое решение одного класса парных уравнений // ПММ. 1990. Т. 54. С. 872–877.
4. Aizikovich S.M. et al. Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // Int. J. Solids Structures. 2002. Vol. 39. P. 2745–2772.
5. Айзикович С.М., Трубчик И.С., Крнев Л.И. Деформирование полупространства при действии произвольной осесимметричной нагрузки // ПММ. 2008. Т. 72, №4.
6. Aizikovich S., Vasiliev A., Seleznev N. Inverse analysis for evaluation of the shear modulus of inhomogeneous media by torsion experiments // Int. J. of Engineering Science. 2010. Vol. 48. P. 936–942.
7. Ворович И.И., Устинов Ю.А. О давлении штампа на слой конечной толщины // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 3. С. 445–455.
8. Александров В.М. Контактные задачи о мягком и жестком покрытиях упругой полуплоскости // Изв. РАН. МТТ. 2010. №1. С. 42–50.

## ANALYTICAL SOLUTIONS OF AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEMS FOR A LAYER

*S.M. Aizikovich, A.S. Vasiliev, S.S. Volkov*

We state the effective solution method of axisymmetric static contact problems of elasticity for a continuous inhomogeneous (functionally-graded) layer of complicated structure, which allows obtaining an approximate solution of the problem in an analytical form. The developed solution is asymptotically exact both for big and small values of the characteristic geometrical parameter of the problem.

*Keywords:* continuously-inhomogeneous layer, functionally-graded media, complicated structure, contact problems, asymptotically exact solution.