Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 1954–1956

УДК 531.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТОННЕЛЕЙ И ТРУБОПРОВОДОВ МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ

Л.А. Алексеева, В.Н. Украинец

Институт математики МОН РК, Алматы (Казахстан)

alexeeva@math.kz

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматривается модельная транспортная задача динамики упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной упругой цилиндрической оболочкой, ось которой параллельна границе полупространства, при действии транспортной нагрузки, движущейся вдоль тоннеля с постоянной скоростью. На основе метода неполного разделения переменных получено аналитическое решение задачи при дозвуковых и сверхзвуковых скоростях движения транспортной нагрузки и проведена его программная реализация в дозвуковом случае. Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругой оболочки и окружающей среды при разных скоростях движения. Изучено влияние параметров оболочки, контактных условий и скорости движения на напряженно-деформированное состояние массива и свободной поверхности. Проведен анализ дисперсионных кривых для случаев скользящего и жесткого контактов оболочки с окружающей средой, определена критическая скорость движения нагрузки, при которой в тоннелях возникают резонансные явления.

Ключевые слова: тоннель, упругость, оболочка, упругое полупространство, транспортная нагрузка, числа Маха, потенциалы Ламе, ряды Фурье, интегралы Фурье.

Введение

Изучение динамики тоннелей и трубопроводов при действии транспортных нагрузок методами математического моделирования приводит к краевым задачам для упругой среды с цилиндрическими полостями, подкрепленными упругими однослойными и многослойными оболочками. Для подземного сооружения глубокого заложения (глубина более пяти характерных поперечных размеров) обычно влиянием дневной поверхности пренебрегают. Библиография таких моделей в значительной мере отражена в [1]. Впервые задача о действии движущейся с постоянной дозвуковой скоростью осесимметричной нормальной нагрузки на тонкостенную цилиндрическую оболочку в упругой среде рассматривалась в работе В.И. Пожуева [2]. Аналогичные исследования для двухслойной оболочки проведены авторами [3, 4]; было показано существование критических скоростей движения нагрузок, при превышении которых в тоннелях возникают свободные незатухающие колебания [3].

Для подземных сооружений мелкого заложения следует учитывать влияние дневной поверхности. Движение дозвуковой периодической нагрузки вдоль неподкрепленной цилиндрической полости в упругом полупространстве изучалось авторами ранее [1, 4]. В этих работах на основе методов неполного разделения переменных, интегральных преобразований и переразложения цилиндрических и плоских волн получены точные аналитические решения соответствующих краевых задач и проведены многовариантные численные эксперименты. Однако вопрос построения подобных решений и их исследования для моделей подкрепленных тоннелей мелкого заложения пока остается мало изученным.

Исследуется модельная контактная задача о динамике упругого полупространства с цилиндрической полостью, подкрепленной упругой цилиндрической оболочкой, ось которой параллельна границе полупространства, при действии транспортной нагрузки, движущейся вдоль тоннеля с постоянной скоростью.

Постановка и аналитическое решение задачи

Рассматривается бесконечно длинная круговая цилиндрическая оболочка в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве $x \le h$ параллельно его горизонтальной границе $x = h$ (земной поверхности). Обозначим радиус внешней поверхности оболочки R_1 ($R_1 < h$), радиус внутренней поверхности – R_2. Контакт между оболочкой и окружающим ее массивом будем полагать либо жестким, либо скользящим. Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует нагрузка интенсивностью P, движущаяся с постоянной скоростью c в направлении ее оси, совпадающей с осью z декартовой системы координат xyz. Физико-механические свойства массива и оболочки характеризуются соответственно следующими постоянными: $\lambda_1, \mu_1, \rho_1; \lambda_2, \mu_2, \rho_2$, где λ_k, μ_k – параметры Ламе, ρ_k – плотность (индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2$ – к оболочке).

Для описания движения оболочки и массива используются динамические уравнения теории упругости в перемещениях ($\mathbf{u}_k$) в подвижной системе координат $\eta = z - ct$:

$$(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2})\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2}\Delta\mathbf{u}_k = \frac{\partial^2\mathbf{u}_k}{\partial\eta^2}, \quad k = 1, 2, \tag{1}$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения–сжатия и сдвига в массиве и оболочке.

Для определения компонент перемещений оболочки и среды необходимо решить уравнения (1), используя следующие граничные условия:

– для свободной от нагрузок поверхности полупространства ($x = h$)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta1} = 0, \tag{2}$$

здесь $\sigma_{ij1}, \sigma_{ij2}$ – компоненты тензора напряжений среды и оболочки (в зависимости от индексов в декартовой либо цилиндрической системе координат);

– на внутренней поверхности оболочки (при $r = R_2$)

$$\sigma_{rj2} = P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta, \tag{3}$$

где $P_j(\theta, \eta)$ – компоненты напряжений подвижной нагрузки $P(\theta, \eta)$;

– при $r = R_1$ (на контактной поверхности полости и оболочки при скользящем контакте)

$$u_{r1} = u_{r2}, \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\eta1} = \sigma_{r\theta1} = 0, \quad \sigma_{r\eta2} = \sigma_{r\theta2} = 0; \tag{4}$$

при жестком контакте

$$u_{j1} = u_{j2}, \quad \sigma_{rj1} = \sigma_{rj2}. \tag{5}$$

Для построения аналитического решения задачи используются потенциалы Ламе:

$$\mathbf{u}_k = \operatorname{grad}\varphi_{1k} + \operatorname{rot}(\varphi_{2k}\mathbf{e}_\eta) + \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi_{3k}\mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \tag{6}$$

которые позволяют строить решения в виде интегралов Фурье и рядов Фурье – Бесселя – решений уравнений для потенциалов, которые имеют вид:

$$\Delta\varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2\varphi_{jk}}{\partial\eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \ k = 1, 2. \tag{7}$$

Вид решений зависит от значений чисел Маха. Для дозвуковых потенциалов ($M_{jk} < 1$) при построении решений используются функции Макдональда, для сверхзвуковых – функции Ханкеля.

Например, при $M_{sk} < 1$ ($m_{sk} > 0$, $k = 1, 2$) решение представляем в виде суммы потенциалов

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \ k = 1, 2; \tag{8}$$

– для полупространства

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r)e^{in\theta},$$

$$\Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta)\exp\left(iy\zeta + (x - h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right)d\zeta;$$

– для оболочки

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2}r)e^{in\theta},$$

$$\Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2}r)e^{in\theta}.$$

Здесь $I_n(kr)$, $K_n(kr)$ – функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$, $j = 1, 2, 3$; $g_j(\xi, \zeta)$, $a_{n1}, \ldots, a_{n9}$ – неизвестные функции и коэффициенты, которые определяются с использованием граничных и контактных условий (2)–(5) и закона Гука.

Получено аналитическое решение задачи при дозвуковых [5] и сверхзвуковых скоростях движения транспортной нагрузки и проведена его программная реализация в дозвуковом случае. Проведены численные эксперименты по определению напряженно-деформированного состояния упругой оболочки и окружающей среды при разных скоростях движения. Изучено влияние параметров оболочки, контактных условий и скорости движения на напряженно-деформированное состояние массива и свободной поверхности. Проведен анализ дисперсионных кривых для случаев скользящего и жесткого контактов оболочки с окружающей средой, определена критическая скорость движения нагрузки, при которой в тоннелях возникают резонансные явления.

Список литературы

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука Казахской ССР, 1989. 240 с.
2. Пожуев В.И. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Строительная механика и расчет сооружений. 1978. №1. С. 44–48.
3. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Критическая скорость движущейся нагрузки в тоннеле, подкрепленном двухслойной оболочкой // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1987. №4.
4. Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Влияние свободной поверхности на тоннель мелкого

заложения при действии подвижных нагрузок // Изв. АН Каз.ССР. Сер. физ.-матем. 1986. №5. С. 75–80.

5. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках // Прикладная механика. 2009. № 9. С. 75–85.

MATHEMATICAL SIMULATION OF THE DYNAMICS OF SHALLOWLY SUBMERGED TUNNELS AND PIPE LINES

L.A. Alexeyeva, V.N. Ukrainec

The model transport problem of the dynamics of an elastic half-space with a cylindrical cavity is considered. Along the cavity, which is supported by an elastic cylindrical shell, the transport load is moving with constant velocity. Using the method of incomplete division of variables, analytical solutions are obtained for subsonic and supersonic velocities of the transport loads and its computer realization is carried out for the subsonic case. The stressed-strained state of an elastic shell and of the surrounding medium for various motion velocities is determined using numerical experiments. The effect of the parameters of the shell, of the contact conditions and velocities of the motion on the stressed-strained state of the array and the free surface is studied. The dispersion curves are analyzed for the cases of slipping and strong contact of the shell with the surrounding medium; the critical velocity of the displacement of the load, for which the resonance phenomena in tunnels appear, is determined.

Keywords: subway, elasticity, shell, elastic semi space, transport load, Mach's numbers, Lame potentials, Fourier rows, Fourier integrals.