УДК 517.946

К ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ

***Ш.Г. Алиев*[1]*, М.М. Зайнулабидов*[2]**

[1]Дагестанский государственный технический университет, Махачкала
[2]Дагестанский государственный педагогический университет, Махачкала

dagcpt@km.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследовано нелинейное уравнение в частных производных второго порядка, которое получается при моделировании некоторых колебательных процессов.

Ключевые слова: нелинейность, краевые задачи, колебания, условия Коши, условия Гурса.

В работе [1] изучено нелинейное уравнение

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y), \qquad (1)$$

которое, как было отмечено в [1], появляется при математическом моделировании различных процессов, таких как, например, определение закона изменения расстояния между точками путей двух движущихся объектов; определение закона взаимодействия токов в электродинамике.

В [1] показано, что (1) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2f(x,y),$$

вследствие чего установлено, что закон изменения квадрата расстояния между точками, движущимися по двум кривым независимо друг от друга, как функция двух переменных, совпадает с законом колебания струны с вытекающими отсюда последствиями в смысле корректности постановки краевых задач для (1).

Настоящая работа посвящена исследованию некоторых нелинейных уравнений общего вида, частным случаем которых является (1).

Рассмотрим уравнение

$$u^{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\alpha u^{\alpha-1}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y), \qquad (2)$$

которое при $\alpha = 1$ совпадает с (1).

Легко заметить, что уравнение (2) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 u^{\alpha+1}}{\partial x\partial y}=(\alpha+1)f(x,y), \qquad (3)$$

когда $\alpha \neq 1$, и в виде

$$\frac{\partial^2 \ln u}{\partial x\partial y}=f(x,y), \qquad (4)$$

когда $\alpha = 1$.

Как известно, решения (3), (4) соответственно имеют представления

$$u^{\alpha+1}(x,y)=\varphi(x)+\psi(y)+\int_{x_0}^{x}d\tau\int_{y_0}^{y}f(\tau,t)dt, \qquad (5)$$

$$\alpha+1\neq 0,$$

$$u(x,y)=\exp\left[\varphi(x)+\psi(y)+\int_{x_0}^{x}d\tau\int_{y_0}^{y}f(\tau,t)dt\right], \qquad (6)$$

$$\alpha+1=0,$$

где $\alpha(x)$ и $t(y)$ – произвольные функции, (x_0,y_0) – фиксированная точка области задания функции $f(x,y)$.

Из представлений (5) и (6) следует корректность постановки классических задач Коши, Гурса, Дарбу для нелинейного уравнения (2) при любом действительном параметре α

Рассмотрим более общее, чем (2), уравнение

$$b(u)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y). \qquad (7)$$

Легко заметить, что (7) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[b(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=f(x,y),$$

что равносильно уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_0^u b(t)dt=f(x,y), \qquad (8)$$

решение $u(x,y)$ которого в неявном виде имеет представление

$$\int_0^{u(x,y)}b(t)dt=\varphi(x)+\psi(y)+\int_{x_0}^{x}d\tau\int_{y_0}^{y}f(\tau,t)dt, \qquad (9)$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ – произвольные функции.

В характеристическом треугольнике со сторонами $x = 1$, $y = 1$, $x - y = 0$ исследуем задачу

Коши для уравнения (7) с начальными условиями

$$u(x,y)=\tau(x),\quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|_{y=x}=v(x),\quad 0\le x\le 1. \qquad (10)$$

Полагая $f(x,y)\equiv 0$, что не ограничивает общности, подчиним решение (9) условиям (10). В результате получим, что $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ должны быть решениями системы уравнений

$$\varphi(x)+\psi(y)=\tau_1(x),\quad \varphi'(x)+\psi'(y)=v_1(x), \qquad (11)$$

где

$$\tau_1(x)=\int_0^{\tau(x)}b(t)dt,\quad v_1(x)=b[\tau(x)]v(x),\quad 0\le x\le 1. \qquad (12)$$

Подставляя решение (11) в (9) (см., напр. [3]), получим, что решение $u(x,y)$ задачи Коши (7), (10) для случая $f(x,y)\equiv 0$ представимо в неявном виде

$$\int_0^{u(x,y)}b(t)dt=\frac{\tau_1(x)+\tau_2(y)}{2}+\frac{1}{2}\int_y^x v_1(t)dt, \qquad (13)$$

где $\tau_1(x)$ и $v_1(x)$ – функции, определенные в (12).

Заметим, что единственность решения задачи Коши (7), (10) зависит от однозначной разрешимости (13) относительно $u(x,y)$, что, естественно, связано с видом заданной функции $b(u)$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a(u)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=c(u)f(x,y), \qquad (14)$$

частным случаем которого является (7). Уравнение (14) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int_0^u\left(\exp\int_0^\tau a(t)dt\right)d\tau=f(x,y)c(u)\int_0^u a(t)dt, \qquad (15)$$

в чем легко убедиться непосредственным вычислением смешанной производной в левой части. При произвольной заданной функции $c(u)$ уравнение (15) не проще, чем (14). Однако при

$$c(u)\exp\int_0^\tau a(t)dt=1 \text{ и при } c(u)=\frac{\partial u}{\partial x}$$

уравнение (15) может быть представлено соответственно в виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=f(x,y),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}f(x,y), \qquad (16)$$

где

$$v(x,y)=\int_0^{u(x,y)}\left(\exp\int_0^\tau a(t)dt\right)d\tau. \qquad (17)$$

Первое уравнение из (16) – хорошо изученное линейное уравнение Даламбера. Что касается второго уравнения из (16), то оно представимо в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{\partial v}{\partial x}=f(x,y),\quad \frac{\partial v}{\partial x}>0, \qquad (18)$$

а следовательно, его решение имеет представление

$$v(x,y)=\int_0^x\exp\left[\varphi(s)\int_0^y f(s,t)dt\right]ds+\psi(y), \qquad (19)$$

где $\varphi(s)$ и $\psi(y)$ – произвольные функции.

В силу (16)–(19) заключаем, что решение $u(x,y)$ уравнения (15), а значит, и (14), в указанных случаях относительно $c(u)$ имеет представление в неявном виде типа (9), которое может быть использовано в начально-краевых и краевых задачах для уравнения (14).

Список литературы

1. Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова З.М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. Махачкала: ДГУ, 2009. С. 120–124.

2. Лоренц Г., Шереметьевский В. Элементы высшей математики. Т. 2. М., 1926. 528 с.

3. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука,1982. 336 с.

ON THE THEORY OF NONLINEAR OSCILLATORY PROCESSES

Sh.G. Aliev, M.M. Zaynoulabidov

The article presents an investigation of the second order nonlinear partial differential equation which is obtained by modeling some of the oscillatory processes.

Keywords: nonlinearity, boundary problems, vibrations, the Cauchy condition, Goursat conditions.