УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГОГО СЛОЯ

Н.С. Анофрикова, Н.В. Сергеева

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

nanofrikova@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуется влияние наследственности на поведение дисперсионных кривых в случае наследственно-упругого слоя, материал которого описывается моделью Работнова. Рассмотрены два случая: симметричного по нормальной координате напряженно-деформированного состояния (НДС) и несимметричного НДС. При изучении собственных колебаний исследованы свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону. Для обоих случаев выведены дисперсионные уравнения. Численные расчеты, проведенные для различных значений наследственно-упругих параметров, определяющих механическое поведение материла слоя, позволяют сделать выводы о влиянии наследственных факторов на поведение дисперсионных кривых. Получены асимптотики для первых мод в окрестности нулевой частоты. Численные расчеты показали совпадение численных решений и асимптотик в рассматриваемых окрестностях, что подтвердило достоверность полученных результатов.

Ключевые слова: дисперсионные уравнения, напряженно-деформированное состояние, наследственно-упругий слой, асимптотики.

Постановка задачи

Рассмотрим распространение гармонических волн в бесконечном слое, ограниченном плоскостями $z = \pm h$, выполненном из наследственно-упругого материала. Плоскость Oxy совместим со срединной плоскостью слоя. Будем рассматривать распространение волн в направлении оси x.

Динамическое НДС слоя определяется уравнениями движения в напряжениях, записанными для случая плоской задачи, и уравнениями состояния, взятыми в интегральной форме. В качестве ядра интегрального оператора выберем дробно-экспоненциальную функцию Работнова [1]:

$$k Э_{-1/2}(-\beta, t) = k t^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]},$$

где k, β – постоянные, определяющие механическое поведение материала, t – время.

При изучении собственных колебаний исследовались свойства тех мод, которые изменяются во времени по гармоническому закону и удовлетворяют уравнениям движения, уравнениям состояния, записанным в перемещениях и напряжениях, и однородным граничным условиям на лицевых поверхностях. Поэтому решение для перемещений v_i искалось в виде

$$v_i = v_i(z)\exp(i\omega t - (\alpha + i\chi)x), \quad i = 1, 3,$$

где ω – частота, χ – волновое число, $\alpha > 0$ – коэффициент затухания, определяющий убывание амплитуды волны с увеличением координаты x.

Рассмотрены два случая: симметричного и антисимметричного по нормальной координате НДС. В первом случае перемещение v_1 и напряжения σ_{11}, σ_{33} являются четными по нормальной координате функциями, а v_3, σ_{13} – нечетными. В этом случае приходим к следующему дисперсионному уравнению:

$$\gamma^4 \mathrm{ch}(a)\frac{\mathrm{sh}(b)}{b} - a^2\chi_*^2 \frac{\mathrm{sh}(a)}{a}\mathrm{ch}(b) = 0,$$

где

$$a^2 = \chi_*^2 - \kappa_F^2\Omega^2, \quad b^2 = \chi_*^2 - \Omega^2, \quad \gamma^2 = \chi_*^2 - \frac{\Omega^2}{2},$$

$$i\chi_* = \alpha + i\chi, \quad \kappa_F^2 = \frac{1-2\nu^F}{2-2\nu^F}, \quad \Omega^2 = \omega_*^2\frac{2(1+\nu^F)}{E^F},$$

$$E^F = 1 - \frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}}, \quad \nu^F = \nu + \frac{1-2\nu}{2}\frac{k}{\beta + \sqrt{i\omega}},$$

$$\omega_* = \frac{h}{c_2}\omega, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}};$$

E, ν – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона, ρ – плотность материала.

Соответствующее дисперсионное уравнение получено и для антисимметричного случая.

Анализ дисперсионного уравнения

Формально дисперсионные уравнения имеют тот же вид, что и соответствующие дисперсионные уравнения для упругого слоя [2–4], но, в отличие от последних, они комплексные. Поэтому дисперсионные уравнения в случае наследственно-упругого слоя не имеют комплексно-сопряженных корней. Из вида этих уравнений следует, что если χ_* является их решением, то и $-\chi_*$ также будет их решением, следовательно, существует симметрия дисперсионных кривых при замене χ_* на $-\chi_*$. Отсутствие комплексно-сопряженных корней ведет к нарушению симметрии частотного спектра относительно плоскостей $\chi = 0$ и $\alpha = 0$. Таким образом, в наследственно-упругом спектре ветви разделяются.

Дисперсионные уравнения были решены численно методом математического микроскопа [5], сочетающего два основных метода поиска корней: метод деления отрезка пополам и метод секущих. Построены трехмерные графики дисперсионных кривых, а также их проекции на плоскость (ω_*, χ) как с положительной, так и с отрицательной мнимой частью χ_* и проекции на плоскость (ω_*, α) как с положительной, так и с отрицательной действительной частью χ_* для различных значений параметров k и β, определяющих наследственные свойства материала. Анализ численных решений показал, что чем больше значения k или меньше значения β, тем раньше и больше начинают расходиться дисперсионные кривые с положительной и с отрицательной мнимой частью χ_*. Численные расчеты показывают, что при уменьшении значений k или при увеличении значений β поведение дисперсионных кривых стремится к упругому случаю. Кроме того, получено, что дисперсионные кривые наследственно-упругого спектра, соответствующие действительным ветвям упругого спектра, являются комплексными с отрицательной мнимой частью χ_*, что определяет затухание решения по координате. Следует заметить, что для наследственно-упругого спектра теряют смысл понятия частоты запирания (так как $\chi_* = 0$, $\omega_* > 0$ не являются корнями дисперсионных уравнений) и частотного минимума, поскольку при движении вдоль ветви ω_* монотонно возрастает. Анализ численных результатов показывает, что в окрестностях частот запирания и частотных минимумов упругоподобного спектра ветви наследственно-упругого спектра имеют наибольшую кривизну. А увеличение значений k, как и уменьшение значений β, ведет к сглаживанию дисперсионных кривых в этих областях. Таким образом, упругоподобный спектр приближенно можно рассматривать как асимптотический для наследственно-упругого при $k \to 0$, $\beta \gg 1$.

Асимптотики корней дисперсионного уравнения

Получены асимптотики корней для первых мод в окрестности нулевой частоты. Для случая симметричного НДС для первой моды имеем

$$\chi_1 = c_{12}\omega + c_{13}\omega^{3/2} + O(\omega^2),$$

$$\alpha_1 = d_{13}\omega^{3/2} + O(\omega^2),$$

где c_{12}, c_{13}, d_{13} – функции, зависящие от ν, k, β. Показано, что при $k = 0$ эти асимптотики совпадают с аналогичными асимптотиками упругого слоя [2].

Численные расчеты показывают совпадение численных решений и асимптотик в рассматриваемых окрестностях, что подтверждает достоверность полученных результатов.

Список литературы

1. Работнов Ю.И. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

2. Кожанова Т.В., Коссович Л.Ю. Дисперсионные уравнения Рэлея – Лэмба. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. 21 с.

3. Kaplunov J.D., Kossovich L.Ju., Nolde E.V. Dinamics of Thin Walled Elasfic Bodies. San Diego: Academic Press, 1998.

4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наук. думка, 1981. 284 с.

5. Березин В.Л., Харитонова К.Ю. Применение метода математического микроскопа при решении трансцендентных уравнений // Проблемы точной механики и управления: Сб. науч. тр. Саратов, 2004. С. 119–122.

INVESTIGATION OF THE DISPERSION EQUATIONS IN THE CASE OF VISCOELASTIC LAYER

N.S. Anofrikova, N.V. Sergeeva

The paper deals with the study of the influence of viscosity on the dispersion curves in the case of viscoelastic layer. The material of the layer is described by the Rabotnovs model. Two cases are considered: symmetric stress-strain state (SSS) on the normal coordinate and asymmetric SSS. The properties of modes which change in time harmonically are investigated for the purpose of studying of the free vibrations. Dispersion equations for both cases are derived. The numerical data for different values of the viscoelastic parameters are obtained. They allowed to make conclusions about the influence of viscosity factors on the dispersion curves. Asymptotics for some modes in the vicinity of zero frequency are obtained. It is demonstrated, that asymtotics and the numerical solutions in these vicinities are coinciding.

Keywords: dispersion equations, the stress-strain state, viscoelastic layer, asymptotics.