УДК 531.36

# ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СЛУЧАИ И АДИАБАТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТОВ



***В.С. Асланов***

Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева

aslanov_vs@mail.ru

*Поступила в редакцию 24.08.2011*

Рассматривается свободное пространственное движение гиростата $P + R$, который представляет собой платформу $P$ с трехосным эллипсоидом инерции и осесимметричный ротор $R$. Общая ось вращения тел совпадает с одной из главных осей инерции носителя. Внешний момент отсутствует, действует только малый внутренний момент относительно оси вращения. С помощью переменных Андуайе – Депри уравнения движения гиростата приведены к системе с одной степенью свободы. Для невозмущенного движения при отсутствии малого внутреннего момента найдены стационарные решения этой системы, проанализирована их устойчивость. Исследованы случаи, когда продольный момент инерции платформы $I_p$ больше наибольшего из поперечных моментов инерции гиростата $I_2$ (сплющенный гиростат), меньше наименьшего $I_3$ (вытянутый гиростат) или принадлежит диапазону, составленному из указанных моментов инерции (промежуточный гиростат). Для каждого типа гиростата получены общие решения, описывающие невозмущенное движение на сепаратрисах и в областях, отвечающих на фазовом портрете колебаниям и вращению. В возмущенном движении, когда медленно изменяется угловая скорость вращения $d$ ротора относительно платформы, найдены адиабатические инварианты, выраженные через полные эллиптические интегралы первого и третьего рода. Результаты работы можно трактовать как некоторое развитие классического случая Эйлера движения твердого тела вокруг неподвижной точки, когда добавляется одна степень свободы – относительное вращение тел. Полученные формулы могут быть полезны также в прикладных задачах при исследовании движения спутников с двойным вращением, в том числе и при изучении хаотических процессов.

*Ключевые слова:* осевые гиростаты, переменные Андуайе – Депри, аналитические решения, адиабатические инварианты.

## Уравнения движения

Задача решается в переменных Андуайе – Депри [1]: $l$, $g$, $h$, $L$, G, $H$ (рис. 1).

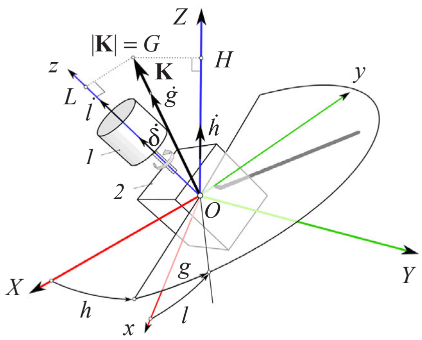


Рис. 1

На рисунке обозначено: *1* – ротор $R$, *2* – платформа $P$. Будем полагать, что $I_2 > I_3$. Уравнения движения приведены к безразмерной системе с одной степенью свободы:

$$l' = s - d - s[(a+b) + (b-a)\cos 2l]/2,$$
$$s' = [(b-a)(1-s^2)\sin 2l]/2, \quad d' = \varepsilon, \qquad (1)$$

где $(\ )' = d(\ )/d\tau$, $\tau = Gt/I_p$ – безразмерное время; $s = L/G$ – безразмерный импульс, $\varepsilon$ – малый параметр, $G = K = \text{const}$ – кинетический момент гиростата, $a = I_p/I_2$, $b = I_p/I_3$.

## Невозмущенное движение, стационарные и общие решения

При $\varepsilon = 0$ уравнениям (1) отвечает безразмерный неканонический гамильтониан

$$H(l,s) = \frac{1}{4}(a+b+(b-a)\cos 2l)(1-s^2) + \frac{1}{2}s^2 - sd = h = \text{const}. \qquad (2)$$

Разрешая (2) относительно $\cos 2l$, получаем уравнение фазовой траектории

$$\cos 2l = [(a+b-2)s^2 + 4ds + 4h - a - b]/[(1-s^2)(b-a)].$$

При $\varepsilon = 0$ система (1) имеет четыре стационарных решения:

$$\cos(2l_*) = 1, \quad s_* = d/(1-b); \quad \cos(2l_*) = -1,$$
$$s_* = d/(1-a); \quad \cos(2l_*) = (2-a-b-2d)/(b-a),$$

$$s_* = 1; \quad \cos(2l_*) = \\ = (2-a-b+2d)/(b-a), \quad s_* = -1. \qquad (3)$$

Показано, что первое решение из (3) при $b > 1$ устойчиво и неустойчиво при $b < 1$. Второе решение устойчиво, если $a < 1$, и неустойчиво, если $a > 1$. Третье и четвертое стационарные решения неустойчивы.

Построена бифуркационная диаграмма, для различных типов гиростатов вычислены сепаратрисные решения в элементарных функциях [2] и общие решения в эллиптических функциях Якоби для возможных случаев вращения и колебаний. Для сплющенного ($b > a > 1$) и вытянутого ($a < b < 1$) гиростатов на фазовом портрете имеют место одна область колебаний и две области, отвечающие вращению. В случае промежуточного гиростата ($b > 1 > a$), наоборот, имеют место две области колебаний и одна область вращения.

## Возмущенное движение и адиабатические инварианты

Для возмущенной системы (1) рассмотрена переменная действия [3]

$$I = \oint s dl = \oint \frac{2d \pm \sqrt{4d^2 + (2-A)(4h-A)}}{2-A} dl, \qquad (4)$$

которая является адиабатическим инвариантом ($A = (a + b) - (b - a)\cos 2l$, интеграл взят за полный период изменения $l$). Замена $x = \cos 2l$ в (4) дает следующий интеграл

$$I = \frac{1}{2} \oint \frac{2d \pm (b-a)\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}{(b-a)(x-x_3)\sqrt{1-x^2}} dx, \qquad (5)$$

где $x_{1,2}$ – корни соответствующего квадратного многочлена. В зависимости от вида корней интеграл действия (5) приведен к полным эллиптическим интегралам первого $K(k)$ и третьего рода $\Pi(n,k)$:

$$I = f_1(x_1, x_2, x_3)K(k) + f_2(x_1, x_2, x_3)\Pi(n_1, k) + \\ + f_3(x_1, x_2, x_3)\Pi(n_2, k). \qquad (6)$$

Для всех типов гиростатов и видов движений (вращения или колебания) получено девять формул вида (6).

***Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №09-01-00384).***

*Список литературы*

1. Deprit A. // American Journal of Physics. 1967. V. 35. P. 424–428.
2. Асланов В.С., Дорошин А.В. // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 5. С. 734–750.
3. Борн М. Лекции по атомной механике. ГНТИ Украины, 1934. 312 с.

## INTEGRABLE CASES AND ADIABATIC INVARIANTS IN THE DYNAMICS OF AXIAL GYROSTATS

***V.S. Aslanov***

This paper presents the study of the dynamics of axial gyrostats. The gyrostat is composed of two rigid bodies: an asymmetric platform and an axisymmetric rotor aligned with a principal axis of the platform. The paper discusses three types of gyrostats: oblate, prolate and intermediate. Rotation of the rotor relative to the platform provides a source of small internal angular momentum, and does not affect the moment of inertia tensor of the gyrostat. We consider the dynamics of gyrostats in the absence external torque. The dynamics are described by ordinary differential equations in the Andoyer – Deprit canonical variables. For the undisturbed motion, when the internal moment is equal to zero, the stationary solutions are found and studied their stability. Also we obtain general exact analytical solutions in terms of elliptic functions and the separatrix trajectories. These results can be interpreted as the development of the classical Euler case for a solid, when added to one degree of freedom - the relative rotation of bodies. For the disturbed motion gyrostats, when there is the system with slowly varying parameter, we obtain the adiabatic invariants in terms of complete elliptic integrals, which are approximately the first integrals of the disturbed system. The adiabatic invariants are value along a trajectory remains approximately constant on long time intervals on which the parameter changes considerably. Results of the study can be useful for the analysis of dynamics of dual-spin spacecraft and for studying the chaotic behavior of the spacecrafts.

*Keywords:* axial gyrostats, Andoyer – Deprit variables, analytical solutions, adiabatic invariants.