УДК 534.1

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ВИБРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В РЕШЕТЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЯХ

В.К. Асташев, В.Л. Крупенин

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва

v_astashev@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Даны уравнения движения решетчатых двумерных виброударных систем. Описаны основные типы сильно нелинейных волн, возникающих в таких системах. Найдены аналитические решения соответствующих уравнений движения, и на этой основе проведена оптимизация решетчатых конструкций, элементы которых подвержены соударениям.

Ключевые слова: распределенные ударные элементы, частотно-временной анализ, интегральные уравнения периодических колебаний, сильно нелинейные волны – «хлопки», периодические функции Грина, критерии оптимизации конструкций.

Постановка задачи

Следуя работе [1], рассмотрим семейство $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_0;\ \mathbf{A}_{11},\ ...,\ \mathbf{A}_{N_1N_2}\}$ стационарных склерономных линейных упруговязких систем $\mathbf{A}_{rn}$ с полной диссипацией энергии. Каждой из систем $\mathbf{A}_{rn}$ $(r = 0, 1, .., N_1;\ n = 0, 1, .., N_2)$ отвечает поле перемещений $w_{rn}(x_{rn}, t) \in \mathbf{R}^3$, где $x_{rn} \in \mathbf{X}_{rn} \subset \mathbf{R}^3$ – векторные координаты точек систем $\mathbf{A}_{rn}$; $t \in \mathbf{R}$. Динамика каждой системы $\mathbf{A}_{qk}$ определяется оператором динамической податливости $\mathrm{L}(x_{k,q}, x_{r,n}; \mathrm{p})$, где p – оператор дифференцирования [2]. Указанные операторы ставят в соответствие силовым полям $f_{rn}(x_{rn}, t)$ поля перемещений

$$w_{k,q}(x_{k,q}, t) = \mathrm{L}(y_{k,q}, x_{r,n}; \mathrm{p})\, f_{rn}(x_{rn}, t). \qquad (1)$$

Каждый интегродифференциальный оператор L находится либо из исходной системы уравнений движения и необходимых дополнительных (например граничных) условий, либо на основании обработки экспериментальных данных [2].

Далее, в силу двумерности рассматриваемых систем поля перемещений и сил, а также операторы динамической податливости даются в матричной форме. Присутствие нелинейных сил обращает представление (1) в нелинейное операторное уравнение.

Будем предполагать, что система $\mathbf{A}_0$ представляет собой прямоугольную решетку [1, 2], составленную из взаимно перпендикулярных семейств струн $k = 0, 1, 2, \ldots, N_1$ и $q = 0, 1, 2, \ldots, N_2$ длиной D_1 и D_2 (рис. 1), в пересечениях которых помещены точечные абсолютно твердые тела с массами m.

Пусть в каждой из систем $\mathbf{A}_{r,n}$ имеются точечные тела $m_{r,n0}$, которые могут соударяться с телами решетки. Таким образом, объединенная система $\mathbf{A}$ содержит $N = N_1N_2$ сосредоточенных ударных пар.

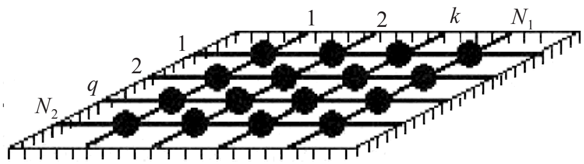

Рис. 1

Введем относительные координаты $u_{k,q0}(t) = u(x_{k,q0}, t) - w_{r,n}(x_{k,q0}, t)$ и силу удара в (r, n)-й ударной паре обозначим $\Phi_{r,n}[u_{r,n0}(t), u_{r,n0t}(t)]$. Тогда можно записать систему из $(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ операторных уравнений движения объединенной виброударной системы $\mathbf{A}$ (ср.[1]):

$$\begin{aligned} u_{k,q}(x_{k,q}, t) &= \mathrm{L}(y_{k,q0}, x_{k,q0}; \mathrm{p})\{f_{k,q0}(y_{k,q0}, t) - \\ &- \sum\sum \Phi_{r,n}[u_{r,n0}(t), u_{r,n0t}(t)]\delta(y_{k,q0} - x_{k,q0})\}; \qquad (2) \\ w_{r,n}(x_{r,n0}, t) &= \mathrm{L}^{(r,n)}(y_{r,n}, x_{r,n}; \mathrm{p})\{\mathrm{H}_{r,n}(y_{r,n}, t) + \\ &+ \Phi_{r,n}[u_{r,n0}(t), u_{r,n0t}(t)]\delta(y_{rn} - x_{r,n0})\}. \end{aligned}$$

В первом уравнении (2), относящемся к решетке, суммирование ведется по $r = 1, \ldots, N_1$; $n = 1, \ldots, N_2$; индексы k и q изменяются в этих же диапазонах; операторы динамической податливости решетки строятся по методикам, данным в [2, 3]. Индексация по времени обозначает дифференцирование. Второе уравнение строится для взаимодействующих с решеткой систем $\mathbf{A}_{r,n}$. Силы f_{q0} приложены к узлам решетки; $H_{r,n}$ – силы, приведенные к взаимодействующим телам систем

$\mathbf{A}_{r,n}$. Такое приведение обычно осуществляется при помощи операторов динамической податливости систем [2].

Проведя $N = N_1N_2$ вычитаний второго уравнения (2) из первого, получаем для относительных координат $N - 1$ уравнений вида

$$U_{r,n0}(t) = U_{r,n0}(t) - \mathrm{L}_{0r,n,r,n}(\mathrm{p})\Phi_{r,n}[u_{r,n0}(t),\, u_{r,n0}(t)] -$$
$$-\sum_{k'r}\sum_{q'n}\mathrm{L}^{(0)}_{k,q,r,n}(p)\Phi_{k,q}[u_{k,q0}(t),u_{k,q0t}(t)], \quad (3)$$

где $U_{k,n0}(t)$ – изменение относительной координаты в пренебрежении соударениями. Второй член в правой части (3) – изменение относительной координаты в предположении, что удар оказывает влияние только в точке локализации; третий член описывает влияние соударений в остальных ударных парах.

Периодические колебания

Предполагая, что все внешние силы $H_{r,n}(y_{r,n}, t)$, $f_{k,q0}(y_{k,q0}, t)$ – периодические с периодом T, будем ограничиваться описанием T-периодических виброударных процессов. Используемые методы частотно-временного анализа [2] основаны на представлении искомых движений через периодические функции Грина (ПФГ), которые однозначно определяются операторами динамической податливости. Например, ПФГ $\chi_0(t)$, отвечающая оператору $\mathrm{L}_{0r}(\mathrm{p})$, выражается через ряд Фурье:

$$\chi_0(t) = T^{-1}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\mathrm{L}_0(in\omega)\exp(in\omega). \quad (4)$$

Для отыскания периодических режимов перейдем от системы операторных уравнений (4) к системе интегральных уравнений периодических колебаний [2, 4]:

$$u_{r,n0}(t) = U_{r,n0}(t) -$$
$$-\int_0^T \chi_{0r,n,r,n}(t-s)\Phi_{r,n}[u_{r,n0}(s),u_{r,n0t}(s)]ds -$$
$$-\int_0^T\sum_{k\neq r}\sum_{q\neq n}\chi^{(0)}_{r,n,k,q}(t-s)\Phi_{k,q}[u_{k,q^0}(t),u_{k,q^0 t}(t)]ds. \quad (5)$$

В случае симметричных внешних воздействий, когда $U_{k,q0}(t+0.5T) = -U_{k,q0}(t)$, в уравнении (5) интегрирование ведется на половине периода и рассматриваются симметричные ПФГ $\chi^*_{0r,n,r,n}(t), \chi^*_{r,n,r,n}(t)$, определяемые рядами (4) только при нечетных $n = 2j + 1$ [2].

Используя классическую концепцию о мгновенном ударе, который происходит в (k, q)-й ударной паре при $t = t_\alpha$, в соответствии с [1, 2, 4] для относительных координат можно записать:

$$\Phi_{k,q0}[u_{k,q0}(t),u_{k,q0t}(t)]\Big|_{t=t_a} = J_{ak,q0}\delta(t-t_a);$$
$$u_{k,q}(t_a) = \Delta_{k,q}; \quad (6)$$
$$J_{ak} = (1+R_{k,q0})m_{k,q0}u_{k,q0t}(t_a - 0) \geq 0,$$

где $\Delta_{k,q}$ – величины установочных зазоров ($\Delta_{k,q} \geq 0$) или натягов ($\Delta_{k,q} < 0$); $J_{\alpha k,q0}$ – значение ударного импульса во время α-го удара, произошедшего в момент времени t_α в некоторой ударной паре, нумеруемой индексами k и q; $R_{k,q0}$ и $m_{k,q0}$ – коэффициент восстановления и приведенная масса ударной пары.

Для T-периодических виброударных процессов из (5) находим следующее представление:

$$u_{r,n0}(t) = U_{r,n0}(t) - J_{r,n0}\chi_{0r,n,r,n}(t-t_{r,n}) -$$
$$-\sum_{k\neq r}\sum_{q\neq n}J_{r,q0}\chi^{(0)}_{r,n,k,q}(t-t_{k,q}), \quad (7)$$

где $t_{k,q} \in [0, T]$ – фиксированный момент удара.

Представление (7) описывает важнейший в приложениях случай одного удара за период внешнего воздействия [2] или двух ударов для симметричных систем. В соответствии с [4] подобное представление будем называть N_{2D}-параметрическим. Искомые $N = N_1N_2$ относительные перемещения $u_{r,n}(t)$ ($r = 1, ..., N_1$; $n = 1, ..., N_2$) определяются с помощью $2N_1N_2$ параметров движения – N_1N_2 импульсов $J_{r,n}$ и N_1N_2 фаз ударов $t_{r,n}$ в каждой из $N = N_1N_2$ ударных пар. Эти неизвестные параметры находятся из второго и третьего условий удара (6), которые после подстановки в них выражения (7) дают N_1N_2 линейных и N_1N_2 нелинейных алгебраических уравнений.

Отметим, что приведенные соотношения существенно расширяют круг виброударных процессов и многомерных систем, которые могут быть изучены при посредстве аналитических или численно-аналитических методов. Например, могут быть даны модели, позволяющие проводить анализ упрочняющих наноструктур [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-08-00500).

Список литературы

1. Крупенин В.Л. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2001. №3. С. 20–28.
2. Babitsky V.I., Krupenin V.L. Vibration of strongly nonlinear discontinuous systems. Springer, 2001. 330 p.
3. Крупенин В.Л. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №2. С. 20–26.
4. Крупенин В.Л. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2006. №3. С. 16–22.
5. Асташев В.К. и др. // Вестник научно-технического развития: Интернет-журнал. 2010. №11. С. 3–11.

ON THE OPTIMIZATION OF VIBRO-IMPACT PROCESSES IN LATTICE STRUCTURES

V.K. Astashev, V.L. Krupenin

The equations of motion of two-dimensional lattice of vibro-impact systems are presented. The main types of strongly nonlinear waves in such systems are described. Analytical solutions of the equations of motion are obtained and, on this basis, the optimization of lattice structures with the elements subject to collisions is done.

Keywords: distributed impact elements, time-frequency analysis, integral equations of periodic oscillations, strongly nonlinear waves – «claps», periodic Green's function, optimization criteria lattice structures.