

УДК 539.3

## НЕКЛАССИЧЕСКИЕ УТОЧНЕННЫЕ МОДЕЛИ В МЕХАНИКЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

© 2011 г.

*В.Н. Бакулин*

Институт прикладной механики РАН, Москва

[vbak@yandex.ru](mailto:vbak@yandex.ru)

*Поступила в редакцию 24.08.2011*

Рассмотрено построение модели для уточненного расчета трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения с учетом неоднородности оболочки, моментного состояния несущих слоев и трехмерного напряженно-деформированного состояния (НДС) слоя заполнителя. Построены аппроксимации полей перемещений для конечно-элементного анализа НДС в несущих слоях, подчиняющихся гипотезам Кирхгофа–Лява. На основе полученных аппроксимаций несущих слоев построены аппроксимирующие функции перемещений для конечного элемента слоя заполнителя и разработаны двумерные и трехмерные оболочечные модели соответственно для расчета моментных несущих слоев и слоя заполнителя, моделируемого с помощью соотношений теории упругости. Проведено тестирование полученных аппроксимаций и моделей.

*Ключевые слова:* модели, трехслойные оболочки, моментное состояние несущих слоев, трехмерное состояние заполнителя.

### Введение

В ракетно-космической, авиационной и другой современной технике широкое применение находят слоистые, в том числе трехслойные, оболочки из традиционных и композиционных материалов (КМ), обладающие высокой удельной прочностью, жесткостью, весовой эффективностью и многими другими важными свойствами [1]. Повышающиеся требования к таким оболочечным конструкциям приводят к необходимости совершенствования подходов и моделей для их расчета.

Наиболее точным является подход, основанный на применении соотношений теории упругости к слоям при расчете трехслойных оболочек. Однако в трехслойных оболочках, как правило, несущие слои являются достаточно тонкими и жесткими по сравнению с толстым и менее жестким слоем заполнителя. Поэтому есть смысл применять уравнения теории упругости только к слою заполнителя, а несущие слои моделировать в рамках гипотез Кирхгофа–Лява или Тимошенко в зависимости от соотношения физико-механических и геометрических характеристик слоев.

Для решения большинства практических задач по уточненному расчету трехслойных оболочек различного назначения приходится строить модели, основанные на численных методах механики.

Рассматривается построение конечно-элементных

моделей естественной кривизны для уточненного расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) моментных несущих слоев и слоя заполнителя трехслойных оболочек.

### Постановка задачи

Исследования в области теорий и методов расчета слоистых оболочек изложены в работах Н.А. Алфутова, С.А. Амбарцумяна, В.В. Болотина, В.В. Васильева, Э.И. Григолюка, Н.К. Галимова, А.И. Голованова, М.А. Ильгамова, В.Н. Кобелева, С.А. Лурье, Х.М. Муштари, И.Ф. Образцова, В.Н. Паймушина, Б.Г. Попова, С.Н. Сухина, С.И. Тимофеева, Э. Рейсснера, Л. Хэбила и многих других.

Обзор и анализ работ показал, что вопросы изучения НДС трехслойных оболочек, являющихся часто применяемыми силовыми элементами конструкций, для многих важных в науке и практике задачах исследованы недостаточно. Это связано со значительными трудностями математического характера и высокими требованиями к точности расчетов НДС конструкций.

Цель настоящего исследования – развитие эффективного подхода [2] применительно к построению конечно-элементных моделей для расчета НДС трехслойных оболочек с учетом неоднородности оболочки, моментного состояния несущих слоев и трехмерного НДС слоя заполнителя.

Для достижения этой цели решены следующие основные задачи. Построены аппроксимации полей перемещений для конечно-элементного анализа НДС в несущих слоях, представляющих собой тонкие моментные оболочки, подчиняющиеся гипотезам Кирхгофа–Лява. При этом для повышения скорости сходимости численных результатов в аппроксимации включены перемещения этих слоев как жесткого целого, определяемые интегрированием соотношений Коши при нулевых значениях деформаций.

На основе полученных аппроксимаций несущих слоев построены аппроксимирующие функции перемещений для конечного элемента (КЭ) слоя заполнителя и разработаны двухмерные и трехмерные оболочечные модели естественной кривизны (точно представляющие форму рассматриваемой оболочки) соответственно для расчета моментных несущих слоев и слоя заполнителя, моделируемого с помощью соотношений теории упругости.

**Модель для расчета НДС  
в тонких моментных несущих слоях  
трехслойной в общем случае  
нерегулярной оболочки вращения**

При построении модели для уточненного исследования НДС трехслойных в общем случае нерегулярных оболочек вращения рассматриваем расчетную схему, в которой гипотезы применяются к слоям, а не к пакету слоев. Это позволяет более адекватно учесть неоднородность структуры, моментное состояние несущих слоев, различные условия закрепления и нагружения слоев. Но при таком подходе значительно растет число степеней свободы конечно-элементных моделей, а следовательно, растут погрешности вычислений, необходимые ресурсы ЭВМ, время расчета. Это значительно затрудняет, а нередко делает невозможным проведение исследования конструкций с надлежащей точностью. В связи с этим актуальной является проблема построения эффективных аппроксимаций искомых функций, позволяющих проводить расчеты с приемлемой точностью на относительно крупных сетках разбиения конструкций на конечные элементы.

Проведенные исследования показали, что аппроксимация обобщенных деформаций (осевой, окружной и сдвиговой деформаций, параметров изменения кривизны и кручения срединной поверхности) несущих слоев с последующим удовлетворением уравнениям совместности деформаций позволяет увеличить скорость сходимости

получаемых результатов, а следовательно, приводит к уменьшению порядка систем уравнений по сравнению с общепринятым подходом (аппроксимация перемещений).

Интегрированием соотношений Коши при полученных аппроксимациях обобщенных деформаций определены функции, аппроксимирующие перемещения, вызванные деформированием оболочки, а при нулевых значениях обобщенных деформаций – перемещения как твердого тела. Дальнейшее решение задачи осуществляется с помощью процедур метода перемещений. Рассмотренный подход, в отличие от общепринятого, является более наглядным и физическим, позволяет правильно выбрать и точнее получить функции формы. В этом случае нет операций дифференцирования при вычислении деформаций (т.е. нет потери точности), сохраняются преимущества метода перемещений (универсальность, алгоритмичность и т.д.).

При этом подходе проще удовлетворять требованиям, предъявляемым к аппроксимирующим функциям (учет перемещений как твердого тела, критерий постоянства деформаций и др.).

**Модель для расчета НДС в слое  
заполнителя трехслойной в общем случае  
нерегулярной оболочки вращения**

При построении модели применяется оригинальный подход [2, 3], в соответствии с которым при получении аппроксимирующих функций перемещений для конечного элемента заполнителя используются эффективные аппроксимации перемещений КЭ несущих слоев. При этом для моделирования НДС в более толстом слое пониженной жесткости (слое заполнителя) разрабатываются трехмерные конечные элементы естественной кривизны, построенные с использованием соотношений теории упругости.

Чтобы избежать погрешностей, вызванных разрывом обобщенных перемещений на поверхностях раздела несущих слоев и слоя заполнителя, для конечных элементов слоя заполнителя на криволинейных поверхностях выбирается столько же узлов, сколько их у КЭ несущих слоев. В качестве узловых неизвестных и аппроксимирующих функций используются те же обобщенные перемещения и аппроксимирующие функции, что и у КЭ несущих слоев.

Проведено тестирование полученных аппроксимаций и моделей и решение актуальных задач.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-08-01301.*

*Список литературы*

1. Бакулин В.Н., Образцов И.Ф., Потопахин В.А. Динамические задачи нелинейной теории многослойных оболочек: Действие интенсивных термосиловых нагрузок, концентрированных потоков энергии. М.: Наука, Физматлит, 1998. 464 с.
2. Бакулин В.Н. // Докл. РАН. 2007. Т. 414, №5. С. 613–617.
3. Бакулин В.Н. Построение аппроксимаций и моделей для исследования напряженно-деформированного состояния слоистых неосесимметричных оболочек // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, №12. С. 118–128.

**NON-CLASSICAL ADJUSTED MODELS IN MECHANICS OF THREE-LAYER SHELLS***V.N. Bakulin*

A model for adjusted analysis of three-layer, in general case, non-regular shells of revolution, accounting for their heterogeneity, momentum condition of the bearing layers and three-dimensional stressed-strained state (SSS) of the filling layer is constructed. Approximations of the displacement fields for finite-element analysis of SSS in bearing layers, following the hypothesis of Kirchhoff–Love, are given. Based on the obtained approximations of the bearing layers, approximating displacement functions for the finite element of the filling layer are constructed, and two-dimensional and three-dimensional shell models are created, respectively, for calculating the momentum bearing layers and the filling layer, modeled by relations of the theory of elasticity. The obtained approximations and models have been tested.

*Keywords:* models, three-layer shells, momentum condition of bearing layers, three-dimensional condition of filler.