УДК 539.3:577.1

МОДЕЛИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК В ЗАДАЧАХ БИОМЕХАНИКИ ГЛАЗА

© 2011 г.

С.М. Бауэр[1], *Е.Б. Воронкова*[2]

[1]Санкт-Петербургский госуниверситет
[2]Королевский технический университет, Стокгольм (Швеция)

s_bauer@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Задача о деформации сферической трансверсально-изотропной оболочки, находящейся под действием внутреннего давления, решается с использованием трехмерной теории упругости, уточненной итерационной теории анизотропных оболочек Родионовой–Титаева–Черныха и теории анизотропных оболочек средней толщины Палия–Спиро. Проводится сравнение полученных результатов. Данная задача моделирует изменение напряженно-деформированного состояния фиброзной оболочки глаза при внутрисклеральных инъекциях.

Ключевые слова: биомеханика глаза, внутриглазные инъекции, внутриглазное давление, теория оболочек, неклассические модели.

Введение

Теория тонких оболочек может применяться при построении моделей операционных вмешательств (например, операции по отслойке сетчатки глаза), для описания поведения как отдельных структур глазного яблока при различных заболеваниях (решетчатой пластинки диска зрительного нерва при глаукоме), так и внешней корнеосклеральной оболочки глаза (внутриглазные инъекции) [1]. При этом как внутренние, так и внешние ткани глаза обладают анизотропными свойствами, имеют разную форму. Механические параметры склеры также различны для глаз с нормальным зрением, дальнозорких или близоруких глаз.

Форма оболочки глаз с нормальным зрением близка к сферической, близорукие и дальнозоркие глаза чаще имеют эллипсоидальную форму. В первом приближении склеру можно считать трансверсально-изотропной оболочкой. Для оценки изменения уровня внутриглазного давления (ВГД) при инъекциях (увеличенный объем) необходимо построить зависимость, характеризующую связь ВГД и объема оболочки. Для сферической оболочки такая аналитическая зависимость может быть получена на основе трехмерной теории упругости и при использовании прикладных теорий анизотропных оболочек. Сравнение точного решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теорий анизотропных оболочек позволяет оценить, насколько точно теории анизотропных оболочек могут описывать решение задачи и применимы, например, для оболочек эллипсоидальной формы.

Деформация сферического слоя

Рассмотрим задачу трехмерной теории упругости о деформации сферического слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 под действием внутреннего давления p. Для изотропной сферы решение этой задачи описано, например, в [2]. Для трансверсально-изотропного слоя, моделирующего склеру, решение задачи представлено в [3]. Будем считать, что сферический слой является тонким, т.е. относительная толщина оболочки $\alpha = h/R$ является малой величиной (здесь $h = R_2 - R_1$ – толщина оболочки, $R = (R_1 + R_2)/2$ – радиус срединной поверхности слоя). По классической теории оболочек прогиб сферической оболочки под действием внутреннего давления имеет вид

$$u^{KL} = p\frac{(1-\nu)R^2}{2E_1 h},$$

где E_1 – модуль упругости при растяжении–сжатии в поверхности изотропии, ν – коэффициент Пуассона. Для трансверсально-изотропного слоя два первых члена асимптотического разложения функции прогиба срединной поверхности, полученной по трехмерной теории [3], в безразмерном виде дают:

$$\frac{u^{3D}}{u^{KL}} = 1 - \alpha(1-\nu^*) - \alpha^2 \frac{3\nu' - \nu^* - 11\nu^*\nu'}{12\nu'}. \quad (1)$$

Здесь $\nu^* = (E_1/E_3)\nu'/(1-\nu)$, E_3 – модуль Юнга при растяжении–сжатии в направлении, перпендикулярном к плоскости изотропии, ν' – коэффициент Пуассона.

Нормальные напряжения в срединной поверхности слоя равны

$$\frac{\sigma_{zz}^{3D}}{p} = -\frac{1}{2}\left(1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{E_1}{E_3}\frac{1-\nu'}{1-\nu} - 1\right)\right). \quad (2)$$

(В классической теории оболочек предполагается, что нормальные напряжения отсутствуют.)

Деформация сферической оболочки по теориям анизотропных оболочек

Безразмерные значения прогиба и нормальные напряжения на срединной поверхности, полученные по теории оболочек средней толщины Палия–Спиро, [4] имеют вид

$$u^{PS}/u^{KL} = 1 - \alpha(1-\nu^*), \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{PS}}{p} = -\frac{1}{2}\left(1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4}\right). \quad (4)$$

Аналогичные соотношения, полученные по итерационной теории Родионовой–Титаева–Черныха [5], таковы:

$$\frac{u^{RTCh}}{u^{KL}} = 1 - \alpha(1-\nu^*) +$$

$$+\frac{\alpha^2}{12}\left(3 - 12\nu^* - 2(\nu^*)^2 - \frac{6E_1(1-2\nu'\nu^*)}{5(1-\nu)E_3}\right), \quad (5)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^{RTCh}}{p} = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2\right). \quad (6)$$

Таким образом, обе теории оболочек позволяют построить для прогиба два первых члена асимптотического разложения точного решения при малых значениях α. В соотношении (5) слагаемое порядка α^2 не совпадает с третьим членом в разложении (1), однако немного уточняет величину прогиба оболочки. Два первых члена соотношений, описывающих нормальные (и тангенциальные) напряжения в фиброзной оболочке, полученные по теории Палия–Спиро, также совпадают с точным решением. Результаты, получающиеся для нормальных напряжений по теории Родионовой–Титаева–Черныха, отличаются от точного решения уже во втором члене. Таким образом, в поставленной задаче для оценки напряжений более точные результаты получаются по теории Палия–Спиро.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №09-01-00140а, 10-01-00244а).

Список литературы

1. Бауэр С.М., Зимин Б.А., Товстик П.Е. Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии. СПб.: СПбГУ, 2000. 92 с.
2. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1955. 492 с.
3. Bauer S.M. et al. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model // Acta Ophthalmologica Scandinavica. 2007. No. 85(7). P. 777–781.
4. Родионова В.А., Титаев В.Ф., Черных К.Ф. Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек. СПб.: СПбГУ, 1996. 280 с.
5. Палий О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. Л.: Судостроение, 1977. 386 с.

NON-CLASSICAL ANISOTROPIC SHELL THEORIES IN OCULAR BIOMECHANICS

S.M. Bauer, E.B. Voronkova

The stressed-strained state of a transversally isotropic spherical layer under normal pressure is studied. Such structures can be used as a basic model for the eyeball in order to evaluate the short term effect of the increasing of intraocular pressure after intravitreal injections, which are extensively used nowadays to treat retinal diseases.

Solutions are obtained using the exact 3D theory of elasticity and two approximate theories for orthotropic plates: the theory of moderate-thickness shells developed by Paliy–Spiro (PS) and the refined theory developed by Rodinova–Titaev–Chernykh (RTC). Expansions of the 3D exact solutions in powers of a small parameter, which is equal to the relative thickness of spherical layer, are compared with the solutions obtained with the PS and RTC shell theories. The PS and RTC theories correctly predict the two first terms of the asymptotic expansions of the 3D solution for displacements. These results show that both theories (PS and RTC) can be applied to evaluate the increasing of intraocular pressure after intravitreal injection in eyes with myopia, i.e. eyes of an ellipsoidal shape.

Keywords: ocular biomechanics, intravitreal injection, intraocular pressure, shell theory, non-classical models.