Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2007–2009

УДК 539.3

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ В КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОМ ПАКЕТЕ ACELAN

А.В. Белоконь

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

belav@ sfedu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Рассматриваются проблемы конечно-элементного моделирования разнообразных пьезоустройств и пьезоэлектрических излучателей и приемников ультразвуковых волн, нагруженных на акустические среды. Описываются подходы, принятые в конечно-элементном пакете ACELAN. Особо отмечаются комплекс симметричных седловых алгоритмов и модели необратимых процессов поляризации и переполяризации поликристаллических сегнетоэлектрических материалов, реализованные в данном пакете ACELAN. Анализируется опыт расчетов по методу конечных элементов конкретных пьезоэлектрических устройств.

Ключевые слова: электроупругость, связанные задачи, акустоэлектроупругость, модели поляризации, метод конечных элементов, пьезоэлектрические устройства.

Рассмотрим некоторый пьезопреобразователь Ω, представленный набором областей $\Omega_j = \Omega_{pk}$, $k = 1, 2, ..., N_p$, $j = k$, со свойствами пьезоэлектрических материалов, и набором областей $\Omega_j = \Omega_{em}$, $m = 1, 2, ..., N_e$, $j = N_p + m$, со свойствами упругих материалов. Будем считать, что физико-механические процессы, происходящие в средах Ω_{pk} и Ω_{em}, можно адекватно описать в рамках теорий пьезоэлектричества (электроупругости) и упругости.

Для пьезоэлектрических сред $\Omega_j = \Omega_{pk}$ будем предполагать, что выполняются следующие полевые уравнения и определяющие соотношения:

$$\rho_{pk}\ddot{\mathbf{u}} + \alpha_{dj}\rho_j\dot{\mathbf{u}} - \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_j, \quad \nabla\cdot\mathbf{D} = 0, \qquad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}_j^E \cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \beta_{dj}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \mathbf{e}_j^T\cdot\mathbf{E},$$
$$\mathbf{D} + \varsigma_d\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{e}_j\cdot\cdot(\boldsymbol{\varepsilon} + \varsigma_d\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{э}_j^S\cdot\mathbf{E}, \qquad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2, \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi, \qquad (3)$$

где α_{dj}, β_{dj}, ζ_d – неотрицательные коэффициенты демпфирования, а остальные обозначения стандартны для теории электроупругости, за исключением дополнительного индекса «*j*», указывающего на принадлежность к среде Ω_j с номером *j*.

Для сред $\Omega_j = \Omega_{em}$ с чисто упругими свойствами будем учитывать только механические поля, для которых примем аналогичные (1)–(3) полевые уравнения и определяющие соотношения в пренебрежении электрическими полями и эффектами пьезоэлектрической связности.

Наконец, пьезоэлектрическое устройство может быть нагружено на рабочие акустические среды $\Omega_j = \Omega_{al}$, $l = 1, 2, ..., N_a$, $j = l + N_p + N_e$. Для этих областей будем использовать уравнения акустики с учетом линейных диссипативных эффектов

$$\frac{1}{\rho_j c_j^2}\dot{p} + \nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \nabla\psi, \qquad (4)$$

$$\rho_j\dot{\mathbf{v}} = \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + b_j\nabla\mathbf{v}, \qquad (5)$$

где ρ_j – равновесное значение плотности, c_j – скорость звука, b_j – диссипативный коэффициент для среды $\Omega_j = \Omega_{em}$, p – звуковое давление, $\mathbf{v}$ – вектор скорости, ψ – потенциал скоростей, $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\mathbf{I}$ – единичный тензор.

Отметим, что принятые здесь модели (1)–(5) отличаются специфическими способами учета демпфирования. Для упругих сред имеем модель учета демпфирования по Рэлею. Эта модель в (1)–(3) обобщена на пьезоэлектрические среды. Подробное обсуждение модели (1)–(3) содержится в [1, 2], а обсуждение модели (4), (5) для акустической среды с диссипацией – в [2]. К (1)–(5) необходимо добавить соответствующие главные и естественные граничные условия, условия согласования полей по границам контакта различных сред, импедансные условия для «усечения» акустических областей, а также начальные условия для нестационарных задач.

Для решения динамических задач акустоэлектроупругости будем использовать метод конечных элементов (МКЭ) в классической формулировке. Выберем согласованную конечно-элементную (КЭ) сетку, задаваемую в областях Ω_{hj}, аппроксимирующих области Ω_j. На этой сетке неизвестные функции $\mathbf{u}$, φ и ψ аппроксимируем в форме

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{N}_u^T(\mathbf{x})\cdot\mathbf{U}(t),\quad \varphi(\mathbf{x},t)=\mathbf{N}_\varphi^T\cdot\mathbf{\Phi}(t),$$
$$\psi(\mathbf{x},t)=\mathbf{N}_\psi^T(\mathbf{x})\cdot\mathbf{\Psi}(t), \qquad (6)$$

где $\mathbf{N}_u$ – матрица функций формы для поля перемещений $\mathbf{u}$; $\mathbf{N}_\varphi$, $\mathbf{N}_\psi$ – векторы функций формы для электрического потенциала φ и потенциала скоростей в акустической среде ψ; а $\mathbf{U}(t)$, $\mathbf{\Phi}(t)$, $\mathbf{\Psi}(t)$ – глобальные векторы соответствующих узловых степеней свободы.

Аппроксимация МКЭ (6) обобщенных постановок динамических задач (1)–(5), включающих в себя основные главные и естественные граничные условия, приводит к следующей системе дифференциальных уравнений относительно вектора неизвестных $\mathbf{a}=[\mathbf{U},\mathbf{\Phi},\mathbf{\Psi}]^T$:

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{a}}+\mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{a}}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{F},$$
$$\mathbf{F}=[\mathbf{F}_u,\mathbf{F}_\varphi+\varsigma_d\dot{\mathbf{F}}_\varphi,0]^T, \qquad (7)$$

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}\mathbf{M}_{uu} & 0 & \widetilde{\mathbf{R}}_{u\psi}\\ 0 & 0 & 0\\ \widetilde{\mathbf{R}}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{M}_{\psi\psi}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{C}_{uu} & 0 & \mathbf{R}_{u\psi}\\ \varsigma_d\,\mathbf{K}_{u\varphi}^T & 0 & 0\\ \mathbf{R}_{u\psi}^T & 0 & -\mathbf{C}_{\psi\psi}\end{pmatrix}, \qquad (8)$$

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}\mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} & 0\\ \mathbf{K}_{u\varphi}^T & -\mathbf{K}_{\varphi\varphi} & 0\\ 0 & 0 & -\mathbf{K}_{\psi\psi}\end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{C}_{uu}=\sum_j(\alpha_{dj}\mathbf{M}_{uuj}+\beta_{dj}\mathbf{K}_{uuj})$, где $\mathbf{M}_{uuj}$ и $\mathbf{K}_{uuj}$ – структурные КЭ матрицы масс и жесткости соответственно, а остальные входящие в (7), (8) подматрицы описаны в [1, 2]. В случае нестационарных задач к системе (7), (8) следует присовокупить начальные условия $\mathbf{a}(0)=\mathbf{a}_0$; $\dot{\mathbf{a}}(0)=\dot{\mathbf{a}}_0$, получающиеся из (6) и соответствующих континуальных начальных условий.

КЭ подход (6)–(8) позволяет использовать комплекс алгоритмов с симметричными седловыми матрицами для статических и динамических задач, причем в рассматриваемую модель можно добавить и учет элементов внешних электрических цепей [3]. Отметим, что такие важнейшие процедуры, как повороты узловых степеней свободы и учет главных граничных условий, необходимые для формирования систем (7), (8), также могут быть реализованы в симметричных формах без нарушения структур матриц МКЭ [4].

С использованием описанного подхода и программного комплекса ACELAN было проведено моделирование разнообразных пьезоэлектрических устройств, пьезокомпозитов, процессов неоднородной поляризации, решены обратные задачи об обнаружении дефектов и задачи оптимизации для составных сред, включающих пьезоэлектрические, упругие и акустические тела. Опыт применения параллельной реализации ACELAN описан в [5] и других работах.

Наряду с линейными задачами акустоэлектроупругости рассматриваются и решаются задачи, связанные с моделированием необратимых процессов поляризации и переполяризации поликристаллических сегнетоэлектрических элементов. Предложены методы решения нелинейных и необратимых задач пластичности и поляризации керамических материалов. Рассмотрены численные алгоритмы расчета остаточных полей поляризации и деформации. Разработанные математические модели подробно изложены в [6]. Алгоритмы и методы имплантированы в конечно-элементный комплекс ACELAN и позволяют, с одной стороны, определять векторные поля остаточной поляризации и тензорные поля остаточной деформации, и, с другой стороны, решать задачи по определению физических характеристик неоднородно поляризованных пьезокерамических элементов.

Представленная работа выполнена под руководством автора научным коллективом, включающим в различные годы следующих основных исполнителей: О.Н. Акопова, А.С. Даниленко, В.А. Еремеева, М.И. Карякина, Н.В. Курбатову, Д.К. Надолина, К.А. Надолина, А.В. Наседкина, А.В. Никитаева, А.Л. Петушкова, А.С. Скалиуха и А.Н. Соловьева.

Список литературы

1. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. // ПММ. 2002. Т. 66, №3. С. 491–501.

2. Nasedkin A.V. Some finite element methods and algorithms for solving acousto-piezoelectric problems. In: Piezoceramic Materials and Devices / Ed. I.A. Parinov. N.-Y.: NOVA Publishers, 2010. P. 175–216.

3. Белоконь А.В., Наседкин А.В., Даниленко А.С. // Вестник Самарс. гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2007. №4(54). С. 56–65.

4. Акопов О.Н. и др. // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, №2. С. 51–60.

5. Васильченко К.Е., Наседкин А.В., Соловьев А.Н. // Вычислит. технологии. 2005. Т. 10, №1. С. 10–20.

6. Белоконь А.В., Скалиух А.С. Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. М.: Физматлит, 2010. 328 с.

ON THE MODELING OF PIEZOELECTRIC DEVICES USING THE ACELAN FINITE ELEMENT PACKAGE

A.V. Belokon

Some problems of finite element modeling of various piezoelectric devices and ultrasound emitters loaded on acoustic media are investigated. New approaches assumed in finite element package ACELAN are described. The set of symmetric saddle algorithms and nonreversible polarization and repolarization models for polycrystalline ferroelectric materials are especially noted. Finite element computation experiences for particular piezoelectric devices are analyzed.

Keywords: electroelasticity, coupled problems, acoustoelectroelasticity, polarization models, finite element method, piezoelectric devices.