*Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики*
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2010–2012

УДК 532.59+532.6

# О ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНОГО ВЕЩЕСТВА КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫМИ ВОЛНАМИ


***Д.Ф. Белоножко, А.А. Очиров, О.В. Посудников***

Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова

belonozhko@mail.ru

*Поступила в редакцию 24.08.2011*

Во втором приближении по амплитуде капиллярно-гравитационной волны построены аналитические выражения, описывающие вызываемое распространением волны дрейфовое движение частиц поверхностно-активного вещества. Выяснилось, что зависимость скорости дрейфового движения от упругости пленки поверхностно-активного вещества имеет сложный немонотонный характер.

*Ключевые слова:* капиллярно-гравитационные волны, свободная поверхность, вязкость, поверхностно-активное вещество, дрейф Стокса.

## 1. Формулировка задачи

Еще со времен Стокса известно, что распространение капиллярно-гравитационных волн по свободной поверхности жидкости сопровождается весьма интересным нелинейным эффектом, обнаруживающимся в расчетах второго порядка малости по амплитуде волны и проявляющимся в медленном дрейфе частиц жидкости в направлении распространения волн [1]. Настоящая работа посвящена изучению закономерностей переноса частиц поверхностно-активного вещества (ПАВ), распределенного на поверхности жидкости, по которой распространяется капиллярно-гравитационная волна.

Пусть в декартовой системе координат $Oxyz$ с осью $Oz$, направленной против направления действия силы тяжести $\mathbf{g}$, вязкая несжимаемая жидкость заполняет полупространство $z<0$. Жидкость имеет плотность $\rho$ и кинематическую вязкость $\nu$. На ее свободной поверхности равномерно распределено ПАВ с поверхностной плотностью $\Gamma_0$ и коэффициентом поверхностной диффузии $D$. Принималось, что по свободной поверхности жидкости в положительном направлении оси $Ox$ в начальный момент времени $t=0$ начинает распространяться бегущая периодическая волна заданной длины. Рассматривалась задача определения дрейфовой скорости, с которой будут двигаться частички ПАВ.

В процессе распространения волны будет иметь место перераспределение ПАВ по свободной поверхности, так что концентрация ПАВ окажется функцией времени и горизонтальной координаты. Локальные изменения концентрации ПАВ будут причиной локальных изменений величины коэффициента поверхностного натяжения $\gamma$. В качестве модели зависимости поверхностного натяжения от поверхностной концентрации $\Gamma$ ПАВ принималось допущение о локальном термодинамическом равновесии между поверхностной фазой ПАВ и жидкостью. Это означает, что локальное изменение концентрации ПАВ мгновенно вызывает изменение локального значения коэффициента поверхностного натяжения в соответствии с изотермой $\gamma=\gamma(\Gamma)$, считающейся известной.

Математическая формулировка задачи определения поля скоростей и поверхностного распределения ПАВ имеет вид [2]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+(\mathbf{U}\cdot\nabla)\mathbf{U}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{U}+\mathbf{g};$$

$$\nabla\cdot\mathbf{U}=0;\quad (\mathbf{U}=u\,\mathbf{e}_x+v\,\mathbf{e}_z);$$

$$z=\xi:\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}=v;$$

$$p-2\rho\nu(\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U})=-\gamma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-3/2};$$

$$-\rho\nu[(\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{U})+(\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\nabla)\mathbf{U})]+$$

$$+\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1/2}\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\left[\frac{\partial(\Gamma u)}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial(\Gamma v)}{\partial x}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2 \Gamma \frac{\partial v}{\partial z}\Bigg] - D\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x^2} - \right.$$

$$\left. -\left(1+\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\right) = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ – орты координатных осей; $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ – орты внешней нормали и касательной к возмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости $z = \xi \equiv \xi(t,x,z)$; $\xi = \xi(t,x,z)$ – профиль свободной поверхности; $u = u(t,x,z)$ – горизонтальная и $v = v(t,x,z)$ – вертикальная компоненты поля скоростей $U$ в жидкости; $p = p(t,x,z)$ – давление; $\Gamma = \Gamma(t,x)$ – поверхностная концентрация ПАВ.

## 2. Принцип построения и общая форма решения задачи

Построение выражения для скорости горизонтального дрейфа осуществлялось с помощью методики, развитой в [3]. Сначала строились выражения для компонент поля скоростей в первом и во втором приближениях по амплитуде капиллярно-гравитационной волны. Затем осуществлялся переход от эйлерова представления поля скоростей к лагранжеву. В результате получалось выражение для скорости индивидуальной жидкой частицы. В построенном выражении сохранялись только нециклические по времени слагаемые, описывающие дрейфовую составляющую движения индивидуальной жидкой частички. Считалось, что непосредственно на поверхности полученное выражение описывает дрейфовую скорость частичек ПАВ.

Выяснилось, что в непосредственной близости к возмущенной волновым движением поверхности наиболее существенная часть горизонтального дрейфового движения индивидуальных частиц жидкости и поверхностно-активного вещества происходит с горизонтальной скоростью:

$$w = A^2 M\sqrt{\frac{\nu}{\pi}}\int_0^t \exp\left(-\frac{z^2}{4\nu(t-\tau)}\right)\frac{\exp(2r\tau)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau. \qquad (1)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{kg(1+\alpha^2k^2)}$ – круговая частота капиллярно-гравитационной волны с волновым числом $k$ на поверхности идеальной жидкости, имеющей капиллярную постоянную $\alpha = \sqrt{\gamma_0/(\rho g)}$ (используется среднее значение коэффициента поверхностного натяжения $\gamma_0 \equiv \gamma(\Gamma_0)$, соответствующее равномерному распределению ПАВ с поверхностной концентрацией $\Gamma_0$). Параметр $r = \omega_0\mathrm{Re}(S)$ меньше нуля и определяется значением комплексной частоты $S$, обезразмеренной на $\omega_0$. Безразмерная комплексная частота $S$ является корнем дисперсионного уравнения:

$$\left((S+2\beta^2)^2 + \left(1-\frac{\Lambda}{S(S+\delta)}\right)\right)\times$$

$$\times\left(4\beta^2\left(1-\frac{S^2+1}{S(S+\delta)}\frac{\Lambda}{4\beta^4}\right)\right)^{-1} = \sqrt{S+\beta^4};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\nu k^2}{\omega_0}}, \quad \Lambda = -\frac{k^3\Gamma_0}{\rho\omega_0^2}\left(\frac{d\gamma}{d\Gamma}\right)_0, \quad \delta = \frac{Dk^2}{\omega_0}.$$

Параметр $\beta$ имеет смысл безразмерной вязкости жидкости; безразмерная величина $\Lambda$ характеризует упругость пленки ПАВ; безразмерное значение $\delta$ отвечает за интенсивность поверхностной диффузии ПАВ. Через эти же параметры весьма сложным образом выражается величина $M = M(k, \beta, \Lambda, \delta)$, входящая в выражение (1) для скорости дрейфового движения $w$.

## 3. Результаты анализа построенного решения

Выяснилось, что известное свойство декремента затухания капиллярно-гравитационных волн достигать максимума при некотором значении упругости пленки ПАВ [4] взаимосвязано с интенсивностью переноса ПАВ капиллярно-гравитационной волной. Величина упругости пленки ПАВ, при которой затухание капиллярно-гравитационной волны максимально, является одновременно тем значением упругости, при которой максимальна величина $M$ в формуле (1) для скорости дрейфового движения частичек жидкости и ПАВ. Таким образом, условия, когда амплитуда дрейфового движения наиболее велика, одновременно являются условиями, когда и быстрота его затухания тоже экстремальна. Выяснилось, что увеличение коэффициента поверхностной диффузии и вязкости уменьшают отчетливость обнаруженного эффекта.

*Список литературы*

1. Longuet-Higgens M.S. // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1953. V. 245, No 903. P. 535–581.

2. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28; 29–37.

3. Белоножко Д.Ф., Козин А.В. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 4. С. 32–40.

4. Lucassen-Reyenders E.H., Lucassen J. // Adv. Coll. Interface Sci. 1969. V. 2. P. 347–395.

**ON THE REGULARITIES OF THE TRANSPORT OF SURFACTANT PARTICLES OWING TO CAPILLARY-GRAVITATIONAL WAVES**

***D.F. Belonozhko, A.A. Ochirov, O.V. Posudnikov***

Analytical relations describing the drift of surfactant particles drift caused by propagation of capillary-gravitational waves are constructed as a second approximation of the amplitude of a capillary gravitational wave. The velocity of the drift is found to behave in a complicated and non-monotonic manner as a function of the elasticity of the surfactant film.

*Keywords:* capillary-gravitational waves, free surface, viscosity, surfactant, Stokes drift.