

УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ КОМПОЗИЦИЙ ИЗ ОБОЛОЧЕК, ГЛАДКО СОПРЯЖЕННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ

© 2011 г.

Г.Н. Белосточный

Саратовский государственный технический университет

belostochny@mail.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Статья посвящена исследованию плавно сопряженных оболочечных композиций с термочувствительной толщиной с помощью теорий оболочек Лява и Рейсснера, отличающихся точностью. Основными геометрическими объектами, используемыми для построения оболочечных композиций, являются тор, конус, сфера и цилиндр. Анализ обобщенного вектора положения любой точки на срединной поверхности такой композиции позволяет определить главную кривизну и главные компоненты метрического тензора для срединной поверхности такой композиции с использованием методов дифференциальной геометрии. Рассматриваются три типа композиций: открытая, замкнутая и покакая. Несвязанные уравнения термоупругости и собственные краевые условия выводятся из принципа Гамильтона в смещениях и вращениях. Получены уравнения для температурных функций, входящие в уравнения термоупругости. В качестве примера приводится решение осесимметричной задачи термоупругости для оболочечной композиции из трех элементов.

Ключевые слова: термоупругость, оболочки, сингулярность, композиции.

1. Поле перемещений композиции с термочувствительной толщиной

Рассмотрим нагретую до температуры $\theta(\alpha^1\alpha^2\alpha^3t)$ композицию, стандартным образом отнесенную к триортогональным координатам. Раскрывая ковариантные производные в выражении для тензора Грина

$$e = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i u^k \nabla_j u_k) \bar{r}^i \otimes \bar{r}^j,$$

после ряда стандартных преобразований получим выражения для тангенциальных компонент поля перемещений по толщине композиции в рамках модели типа Рейсснера:

$$\begin{aligned} u_l = & u_{0l}(\alpha^1\alpha^2t)z_l + \\ & + \frac{\varphi_l}{G} \left[\frac{h^2}{4}z + \frac{h^2}{8R_l}z^2 - \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{12R_l}z^4 \right] + \frac{w_{,l}}{\sqrt{G_{ll}}} \times \\ & \times \left[-(2 + \varepsilon(1 + \alpha\theta_0))z - \frac{\varepsilon\alpha\theta_1}{2h} \left(z^2 - \frac{1}{3R_l z^3} \right) \right] + \\ & + \frac{\alpha\theta_{0,l}}{2\sqrt{G_{ll}}} (2\varepsilon + 1) \left(z^2 - \frac{1}{3R_l z^3} \right) + \\ & + \frac{\alpha\theta_{1,l}}{\sqrt{G_{ll}}6h} (2\varepsilon + 1) \left(z^3 - \frac{1}{3R_l z^4} \right). \end{aligned}$$

2. Обобщенный вектор $\bar{r}(\varphi, \vartheta)$ положения любой точки СПК, компоненты ковариантного метрического тензора и главные кривизны

Композиция из четырех элементов конус–сфера–цилиндр–сфера (К–С–Ц–С):

$$\begin{aligned} \bar{r} = & R \left\{ \frac{\text{ctg}\psi\text{tg}\varphi}{\sin\psi(1 + \text{ctg}\psi\text{tg}\varphi)} + \left[\left(\frac{1}{\sin\psi} - \cos\varphi \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\text{ctg}\psi\text{tg}\varphi}{\sin\psi(1 + \text{ctg}\psi\text{tg}\varphi)} \right] H \left(\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) \right) + \right. \\ & \left. + \left[\left(\text{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sin\psi} \right) - \left(\frac{1}{\sin\psi} - \cos\varphi \right) \right] \times \right. \\ & \left. \times H \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \left[\left(1 + \frac{1}{\sin\psi} + \sin \left(2\varphi - \frac{3\pi}{2} \right) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left(\text{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{\sin\psi} \right) \right] H \left(\varphi - \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \bar{e}_1 + \\ & + R \left\{ \frac{\text{tg}\varphi}{\sin\psi(1 + \text{ctg}\psi\text{tg}\varphi)} + \left[\sin\varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\text{tg}\varphi}{\sin\psi(1 + \text{ctg}\psi\text{tg}\varphi)} \right] H \left(\varphi - \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) \right) + \right. \\ & \left. + (1 - \sin\varphi) H \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \left[\cos \left(2\varphi - \frac{3\pi}{2} \right) - 1 \right] \times \right. \end{aligned}$$

$$\times H\left(\varphi - \frac{3\pi}{4}\right)\left\{(\sin \vartheta \bar{e}_2 + \cos \vartheta \bar{e}_3)\right\}$$

Композиция из трех элементов С-Ц-С:

$$\begin{aligned} \bar{r} = R & \left\{ (1 - \cos \varphi) + \left[\left(1 + \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) - \right. \right. \\ & - (1 - \cos \varphi) \left. \right] H \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \left[2 + \sin \left(2\varphi - \frac{3\pi}{2} \right) - \right. \\ & - \left. \left(1 + \operatorname{tg} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right] H \left(\varphi - \frac{3\pi}{4} \right) \right\} \bar{e}_1 + R \left\{ \sin \varphi + \right. \\ & + (1 - \cos \varphi) H \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + \left[\cos \left(2\varphi - \frac{3\pi}{2} \right) - 1 \right] \times \\ & \left. \times H \left(\varphi - \frac{3\pi}{2} \right) \right\} (\sin \vartheta \bar{e}_2 + \cos \vartheta \bar{e}_3). \end{aligned}$$

На рис. 1 изображена композиция из трех элементов конус–тор–цилиндр. Вектор $\bar{r}(x, \vartheta)$ запишется в виде

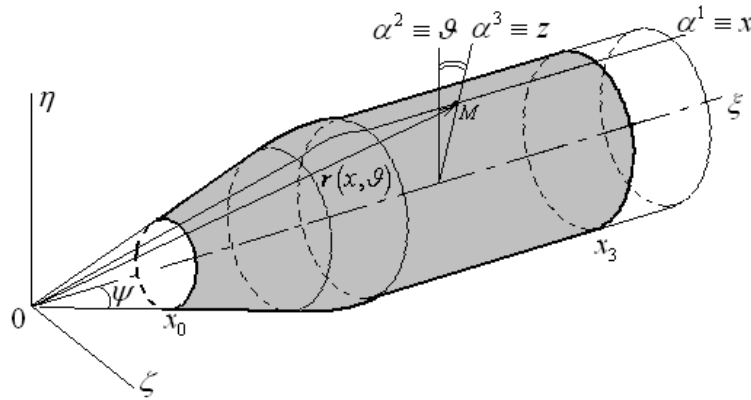


Рис. 1

$$\begin{aligned} \bar{r}(x, \vartheta) = & \langle x \cos \psi + (x_1 \cos \psi + r \sin \psi - r \sin \chi - \\ & - x \cos \psi) H_1 + (x - x_2 + x_1 \cos \psi + r \sin \psi - \\ & - x_1 \cos \psi - r \sin \psi + r \sin \chi) H_2 \rangle \bar{\xi} + \cos \vartheta \times \\ & \times \langle x \sin \psi + (R - r + r \cos \chi - x \sin \psi) H_1 + [R - \\ & - (R - r + r \cos \chi) H_2] \rangle \bar{\eta} + \sin \vartheta \langle x \sin \psi + (R - r + \\ & + r \cos \chi - x \sin \psi) H_1 + [R - (R - r + r \cos \chi) H_2] \rangle \bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Главные кривизны k_1 и k_2 определим, исходя из необходимого и достаточного условия

$$d\bar{e}_3 = -kd\bar{r},$$

где $d\bar{r}$ идет по одному из главных направлений. Выражения для главных кривизн на основании решения алгебраического уравнения и ряда преобразований примут вид:

$$k_1 = \frac{1}{r} (H_1 - H_2),$$

$$\begin{aligned} k_2 = \frac{1}{x \operatorname{tg} \psi} & + \left(\frac{\cos \chi}{R - r + r \cos \chi} - \frac{1}{x \operatorname{tg} \psi} \right) H_1 + \\ & + \left(\frac{1}{R} + \frac{\cos \chi}{R - r + r \cos \chi} \right) H_2. \end{aligned}$$

Здесь H_i – обобщенные функции Хевисайда, неопределенные и ограниченные в точках $\varphi = \varphi_i$ (если параметризация по образующей, как в последнем случае, то в точках $x = x_i$).

Определение обобщенного вектора положения позволяет стандартным образом вычислять компоненты основного метрического тензора срединной поверхности композиции $G_{ij} = \bar{r}_{,i} \cdot \bar{r}_{,j}$. Тогда

$$\begin{aligned} G_{11} = 1, \quad G_{12} = 0, \\ \sqrt{G_{22}} = x \sin \psi + (R - r + r \cos \chi - \\ - x \sin \psi) H_1 + [R - (R - r + r \cos \chi)] H_2. \end{aligned}$$

По этой же схеме рассматриваются композиции из цилиндрических оболочек и пластин:

$$\begin{aligned} \bar{r} = R & \left\{ (1 - \cos \varphi) + [(1 - \operatorname{tg} \varphi) - (1 - \cos \varphi)] H_1 + \right. \\ & + [(2 + \cos(2\varphi)) - (1 - \operatorname{tg} \varphi)] H_2 \left. \right\} \bar{e}_2 + \eta \bar{e}_2 + \\ & + R \left\{ \sin \varphi + (1 - \sin \varphi) H_1 + (-\sin 2\varphi - 1) H_2 \right\} \bar{e}_3. \end{aligned}$$

Уравнения термоупругости и естественные краевые условия выводятся из интегрального вариационного принципа Гамильтона с последующей конкретизацией главных кривизн и параметров Ламе. Следует отметить возможность перехода к уравнениям и условиям на линиях контакта дискретной модели. Краевая задача при таком подходе чрезвычайно громоздка, и использование аналитических методов анализа приводит к непреодолимым математическим трудностям.

GOVERNING THERMOELASTIC EQUATIONS FOR SMOOTHLY ADJOINED SHELL COMPOSITIONS

G.N. Belostochny

This article is focused upon the research of smoothly adjoined shell compositions with thermo sensitive thickness in terms of Love and Reissner shell theories that differ in accuracy.

The main geometric objects used to form shell compositions are torus, cone, sphere and cylinder. Examination of the generalized location vector of any point on the median surface of the composition makes it possible to determine the main curvatures and main metrical tensor components for the median surface of the composition using differential geometry methods. Three types of shell compositions are examined: open, closed and gently sloping ones. Uncoupled thermoelastic equations and natural boundary conditions are derived from the Hamilton principle in terms of displacements and rotations. Equations for temperature functions included in thermoelastic equations for shell compositions are obtained. The solution of the axisymmetric thermoelastic problem for three-element shell composition is given as an example.

Keywords: thermoelasticity, shells, singularity, compositions.