Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2022–2023

УДК 539.3

СВЕДЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ К ЗАДАЧАМ ОБ УСТАНОВИВШИХСЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ: АЛГОРИТМ НА БАЗЕ ANSYS, ПЕРСПЕКТИВЫ

***А.С. Береснев*[1], *А.А. Большаков*[2], *Г.Л. Колмогоров*[1]**

[1]Пермский государственный технический университет
[2]ЗАО «Институт «ПИРС», Пермь

beresnev@project-center.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

С применением подхода Треффца решения начально-граничных задач сводятся к решению последовательности задач об установившихся вынужденных колебаниях. Задача вынужденных колебаний решается с использованием возможностей ANSYS.

Ключевые слова: метод Треффца, вынужденные колебания, конечно-элементный расчет, начально-граничная задача.

Под задачей о распространении граничного режима в механике деформируемого твердого тела понимается определение изменений во времени напряженно-деформированного состояния изначально покоящегося тела под действием приложенных к поверхности нагрузок или перемещений. Такие задачи возникают при расчете конструкций на действие импульсных эксплуатационных нагрузок, транспортировке изделий, расчете сооружений на сейсмические воздействия.

Один из путей построения приближенного решения обсуждаемой задачи в области V с границей S – его представление в форме ряда по системе функций $\{\psi_k(M)\varphi_k(t)\}$ ($M \in \overline{V}$, $t \in T$, $t \geq 0$ – время) таких, что $\psi_k(M)\varphi_k(t)$ является некоторым частным решением рассматриваемого дифференциального уравнения движения.

Распространенной реализацией такого подхода является метод разложения по собственным формам колебаний [1], в котором каждая главная обобщенная координата определяется из решения соответствующего дифференциального уравнения методом Дюамеля. Основной проблемой при этом является определение частот и форм собственных колебаний в случае сложных систем.

Существует, однако, и иной подход к построению решений задач о распространении граничного режима в форме с разделенными переменными [2]. Рассмотрим его обобщение на случай сложных систем.

Задавшись интервалом аппроксимации по времени $(0, \tau_0)$, выберем

$$\varphi_k(t) = \sin(k\pi/(2\tau_0))t, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (1)$$

Таким образом, нами заданы частоты вынужденных колебаний системы (которые являются некоторыми «фиктивными» частотами, поскольку в итоге решается задача статики) и проблема сведена к суперпозиции решений задач об установившихся вынужденных колебаниях. Определившись с функцией времени, координатные функции $\psi_k(M)$ находим, решая уравнение Лагранжа методом конечных элементов.

Коэффициенты разложения решения начально-граничной задачи по системе построенных координатных функций определяются из условия минимума квадратичной невязки начальных условий и силовых граничных условий (кинематические граничные условия удовлетворяются при построении конечно-элементной аппроксимации функции $\psi_k(M)$).

Выбор вида аппроксимации решения в форме ряда по системе функций проводится на основе следующей **теоремы**: *для приближения решения начально-граничной задачи в* $L_2(\overline{V})$ *в виде*

$$U^N(M,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k \psi_k(M)\varphi_k(t) \qquad (2)$$

методом НКГ, необходимо, чтобы система функций Треффца $\{\psi_k(M)\varphi_k(t)\}$ *была плотно-полной (неминимальной) в* $L_2(S \times T)$.

Ввиду неминимальности используемого базиса необходимо применение регуляризации на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений. Достаточно просто доказывается сходимость (в соответствующей метрике) последовательности регуляризованных квазирешений к точному.

Правомочность предлагаемого подхода к решению начально-граничных задач иллюстрируется тестовым примером.

Рассматривается задача о вынужденных динамических продольных перемещениях призматического стержня длиной l, один конец которого защемлен ($x = 0$), а к другому ($x = l$) в момент времени $t = 0$ прикладывается возмущающая сила $P = \text{const}$. Данная задача сводится к минимизации функционала F, который с учетом дискретизации принимает вид

$$F = \int_0^{\tau_0} \left(P - \sum_{k=1}^{N} C_k R_k \sin \frac{k\pi}{2\tau_0} t \right)^2 dt + \sum_{j=1}^{Q} \Delta l_j \left(\sum_{k=1}^{N} C_k \frac{k\pi}{2\tau_0} U_{kj} \right)^2, \qquad (3)$$

где R_k – амплитудное значение реакции в узле приложения нагрузки $P(t)$ для k-й частоты вынужденных колебаний; Q – количество узлов разбиения; Δl_j – длина конечного элемента, соответствующая j-му узлу; U_{kj} – амплитудное смещение j-го узла при k-й частоте вынужденных колебаний.

Сопоставляются решения из [1] по методу [2] и по предлагаемому обобщению подхода [2]. На рис. 1 показаны перемещения точки приложения нагрузки ($x = l$) по времени: *1* – подход [1], *2* – подход [2], *3* – рассматриваемый подход.

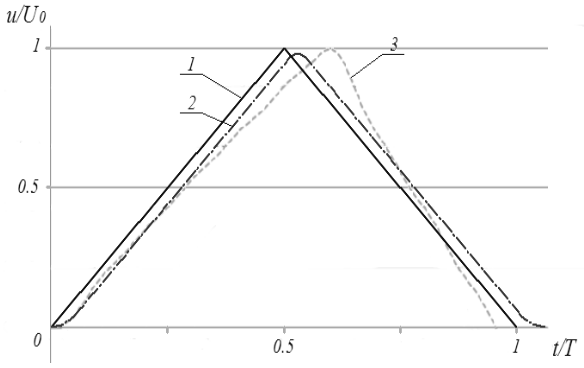

Рис. 1

Приводятся примеры применения метода к расчету стержневых пространственных систем на сейсмические воздействия, обсуждаются перспективы применения подхода к решению начально-граничных задач для систем с трением, отличным от вязкого.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолюка. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.

2. Большаков А.Ю. Реакция упругих тел на импульсное нагружение в условиях плоской деформации // Численное моделирование статического и динамического деформирования конструкций: Сб. науч. трудов. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. С. 8–11.

REDUCTION OF THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS TO PROBLEMS OF STATIONARY INDUCED OSCILLATIONS: ANSYS-BASED ALGORITHM, PROSPECTS

A.S. Beresnev, A.A. Bolshakov, G.L. Kolmogorov

When applying Treffts approach, solutions of initial boundary value problems are reduced to solving a sequence of stationary induced oscillation problems. Stationary forced oscillation problem is solved using ANSYS resources.

Keywords: Treffts approach, stationary induced oscillations, finite element analysis, initial boundary condition problem.