

УДК 531.36

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ В ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

© 2011 г.

Ю.Н. Бибиков

Санкт-Петербургский госуниверситет

bli37@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследован вопрос об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, у которых невозмущенная часть гамильтониана не является квадратичной.

*Ключевые слова:* устойчивость, гамильтониан, КАМ-теория.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим вещественно аналитическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия в начале координат.

Пусть гамильтониан имеет вид  $H = H^0 + H^1$  с невозмущенной частью

$$H^0 = \frac{\lambda_1}{2m}(p_1^{2m} + mq_1^2) - \frac{\lambda_2}{2n}(p_2^{2n} + nq_2^2), \quad (1)$$

где  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , а  $m > 1$ ,  $n > 1$  – натуральные числа. Разложение возмущения  $H^1$  по степеням  $p_1, q_1, p_2, q_2$  не содержит членов порядка ниже  $2N + |k - l| + 1$ , где  $N$  – наименьшее общее кратное чисел  $m$  и  $n$ ;  $N = ml = nk$ , если, рассматривая  $p_1$  как величину  $l$ -го измерения, а переменную  $p_2$  как величину  $k$ -го измерения, приписать переменным  $q_1, q_2$  измерение, равное  $N$ .

Такая задача возникает при исследовании консервативных возмущений пары осцилляторов

$$\ddot{p}_1 + \lambda_1^2 p_1^{2m-1} = 0,$$

$$\ddot{p}_2 + \lambda_2^2 p_2^{2n-1} = 0.$$

Отметим, что к виду (1) приводятся гамильтонианы, у которых коэффициентами при  $q_1^2$  и  $q_2^2$  являются произвольные положительные числа. Случаи, когда хотя бы одно из чисел  $m$  или  $n$  рав-

но 1, рассмотрены в работах В.И. Арнольда, Ю. Мозера (см. [1]) и А.Г. Сокольского [2].

### 2. Результаты исследования

Доказаны две теоремы:

**Теорема 1.** Если  $n \neq m$ , то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

**Теорема 2.** Если  $n = m$ , то положение равновесия условно устойчиво по Ляпунову для начальных данных, удовлетворяющих условию  $H \neq 0$ .

Редукция системы на поверхность уровня  $H = 0$  показывает, что при  $m = n$  начало координат устойчиво в случае общего положения.

Геометрическое обоснование теорем 1 и 2 дано в работе [3].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09.01.00734(а).*

#### Список литературы

1. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 472 с.
2. Сокольский А.Г. // Прикладная математика и механика. 1977. Т.41, вып. 1. С. 24–33.
3. Бибиков Ю.Н. // Дифференциальные уравнения и процессы управления: Электронный журнал. 2010. №4. С. 26–32.

## ON THE STABILITY OF HAMILTONIAN SYSTEMS WITH TWO DEGREES OF FREEDOM

Yu.N. Bibikov

The problem of the stability of the state of equilibrium of Hamiltonian systems with two degrees of freedom whose unperturbed Hamiltonian is not quadratic is studied.

*Keywords:* stability, Hamiltonian, КАМ-theory.