Фундаментальные проблемы теоретической и прикладной механики
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2032–2033

УДК 531.01

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

И.В. Бойков

Пензенский госуниверситет

boikov@pnzgu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Приведены критерии устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных и разностных уравнений и систем нелинейных уравнений Вольтерра. Критерии охватывают одновременно регулярный и всевозможные критические случаи. Даны приложения приведенных критериев устойчивости при исследовании ряда задач иммунологии и экологии.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, разностные уравнения, интегральные уравнения Вольтерра, нелинейные уравнения, устойчивость по Ляпунову.

1. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

Рассмотрим в банаховом пространстве B нелинейное операторное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t, x, (t)), \quad A(t,0) \equiv 0. \tag{1}$$

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (1). Зададим начальное приближение

$$x(0) = x_0, \quad x_0 \in B, \tag{2}$$

и рассмотрим задачу Коши (1), (2).

Теорема 1 [1]. *Предположим, что в некотором шаре $R(0,\delta)(R(0,\delta): \| x \| \leq \delta, x \in B)$ банахова пространства B выполнены условия: для любого $T > 0$ и любого $z \in R(0,\delta)$ найдется такой линейный оператор $L(T, z)$, что:*

1) *логарифмическая норма оператора* $\Lambda(L(T, z)) < 0$ $(\Lambda(L(T, z))) \leq -\alpha, \alpha > 0)$;

2) *для любого как угодно малого ε $(\varepsilon > 0)$ существует такая окрестность $\delta_1(\varepsilon)$ и такое значение $\Delta T(\varepsilon)$ (для каждой точки z свое), что при $\|x(T) - z\| \leq \delta_1$ и $t \in [T, T + \Delta T]$ справедливо неравенство $\|A(t, x(t)) - L(T, z)x(t)\| \leq \varepsilon$.*

Тогда тривиальное решение уравнения (1) *устойчиво* (*асимптотически устойчиво*).

Аналогичное утверждение справедливо и для разностных уравнений.

Для получения критериев устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных уравнений для каждого класса уравнений строятся соответствующие операторы $L(T, z)$. Подробности построения операторов $L(T, z)$ для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием, систем нелинейных уравнений в частных производных параболического вида приведены в [1].

Рассмотрим в банаховом пространстве B уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B(x(t-\eta)) \tag{3}$$

с начальным условием (2). Здесь $A \in [B, B]$ линейный ограниченный оператор, действующий из B в B; $B(x)$ – нелинейный оператор действующий из B в B, причем $B(0) = 0$, $\|B(x)\| \leq \beta\|x\|$. Будем считать, что при $-\eta \leq t < 0$ решение $x(t)$ уравнения (3) имеет предысторию:

$$x(t) = 0, \ -\eta \leq t < 0. \tag{4}$$

Уравнения (3), (2), (4) появляются, в частности, в математических моделях иммунологии при описании процесса заражения здорового организма [2].

Теорема 2. *Пусть логарифмическая норма оператора A отрицательна и выполнено условие $\Lambda(A) + \beta < 0$. Тогда тривиальное решение задачи Коши при условии* (4) *устойчиво.*

Исследуем устойчивость тривиального решения уравнения (3) в предположении, что возмущено не только начальное условие, но и предыстория, т.е. рассмотрим задачу Коши (3), (2) в предположении, что

$$x(t) = \psi(t), \quad -\eta \leq t \leq 0. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть логарифмическая норма оператора A отрицательна* $(\Lambda(A) < 0)$ *и выполнено условие $\beta e^{|\Delta(A)|\eta} < |\Lambda(A)|$. Тогда тривиальное решение задачи Коши при возмущении начальных условий и предыстории* (5) *асимптотически устойчиво.*

Рассмотрим в банаховом пространстве B уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t, x(t-\eta)) \qquad (6)$$

с начальным условием (2).

Теорема 4. *Пусть при любом t выполняются условия:* $\Lambda(A(t)) \le -\alpha(t)$, $\alpha(t) > \alpha \ge 0$, $\|B(t, x(t))\| \le \beta(t)\|x(t)\|$, $\beta(t)$ – *неубывающая функция. Тогда тривиальное решение задачи Коши* (6), (2) *при условиях* (4) *асимптотически устойчиво.*

Пусть $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in R_n$, $\|\gamma\| \ne 0$, $T (0 \le T < \infty)$ – фиксированный момент времени. Введем матрицу $B(T, \gamma) = b_{ij}(T, \gamma)$, $i, j = 1, 2, ...$, элементы которой имеют вид

$$b_{ij}(T,\gamma) =$$

$$= \begin{cases} \alpha_{ij} \dfrac{B_i(T, \gamma_1, ..., \gamma_{j-1}, \gamma_j, \gamma_{j+1}, ..., \gamma_n)}{\gamma_j}, & \gamma_j \ne 0, \\ 0, & \gamma_j = 0, \end{cases}$$

где $\alpha_{ij} \ge 0$, причем $\alpha_{ij} = 0$, если $\gamma_i = 0$, и $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$.

Теорема 5. *Пусть* δ – *достаточно малое положительное число;* $B_i(t, 0) \equiv 0, i = 1, 2, ..., n$; функции $B_i(t, u_1, ..., u_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, *непрерывны по всем аргументам;* $\| B_2'(t, z) \| \le L(t)$ *при* $t \ge 0$, $z \in B(0, \delta)$, *где* $B_2'(t, z)$ *означает производную Фреше по второй переменной. Пусть функция* $L(t)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:* 1) *функция* $L(t)$ *невозрастающая,* 2) *функция* $L(t)$ *непрерывная. Пусть для любого* γ, $0 < \|\gamma\| \le \delta$ *и для любого* T, $0 \le T < \infty$, *выполнено условие* $\Lambda(A(T)) + \Lambda(B(T, \gamma)) + L(T) < 0$. *Тогда тривиальное решение уравнения* (6) *устойчиво.*

Аналогичные результаты получены и при исследовании устойчивости решений систем нелинейных уравнений Вольтерра.

2. Устойчивость решений в математических моделях иммунологии

Полученные в п. 1 критерии применяются к исследованию устойчивости решений ряда математических моделей иммунологии. Простейшая (базовая) модель иммунологии описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида [2]:

$$\frac{dV}{dt} = (\beta - \gamma F)V,$$

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon(m)\alpha V(t-\tau)F(t-\tau) - \mu_c(C - C^*),$$

$$\frac{dF}{dt} = \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F,$$

$$\frac{dm}{dt} = \sigma V - \mu_m m.$$

Вирусные и бактериальные заболевания описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений 10–20 порядков с запаздываниями.

Приведены критерии устойчивости, асимптотической устойчивости, устойчивости в целом ряда моделей иммунологии с параметрами, зависящими от времени.

Список литературы

1. Бойков И.В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза: Изд-во Пензенского госуниверситета, 2008. 244 с.

2. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты. М.: Наука, 1991. 304 с.

STABILITY OF THE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

I.V. Boykov

Criteria of stability the of solutions of systems of nonlinear differential equations, difference equations and Volterra integral equations are given. These criterions include both regular case and all possible critical cases simultaneously. Applications of the presented criteria to the investigation of a number of tasks of immunology and ecology are given.

Keywords: differential equations, difference equations, Volterra integral equations, nonlinear equations, Liapunov stability.