УДК 531.539

УПРАВЛЕНИЕ ДВОЙНЫМ МАТЕМАТИЧЕСКИМ МАЯТНИКОМ ПРИ ПОМОЩИ ВИБРАЦИИ ТОЧКИ ПОДВЕСА

П.О. Буланчук

Московский физико-технический институт

Bullpav@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Исследуется движение двойного математического маятника с периодической вибрацией точки подвеса. Цель работы – нахождение управляющих параметров колебаний, необходимых для стабилизации маятника в заданном положении. Аналитически получено решение для случая вибраций вдоль выделенного направления. Численно найдена область положений, в которой положение маятника будет устойчивым.

Ключевые слова: двойной маятник, маятник Капицы, маятник Стефенсона, маятник с вибрирующей точкой подвеса, оборотный маятник, стабилизация маятника.

Рассматривается движение двойного математического маятника с периодической вибрацией точки подвеса. Вибрации осуществляются вдоль выделенного направления, определяемого вектором **c**. Величина |**c**| выбирается равной среднеквадратичной скорости точки подвеса.

Положение равновесия

Уравнения Лагранжа для системы записываются в форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{F},$$

где **F** – сила трения (в нашем случае рассматривается только вязкое трение). За обобщенные координаты берутся углы q_i между стержнями и вертикалью (рис. 1).

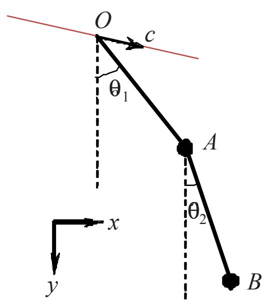

Рис. 1

Функция Лагранжа имеет вид $L = K - U$, где

$$K = \frac{m}{2}((l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + \dot{r}_x)^2 + (-l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + \dot{r}_y)^2) + \\ + \frac{m}{2}((l\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l\dot{\theta}_2\cos\theta_2 + \dot{r}_x)^2 + \\ + (-l\dot{\theta}_1\sin\theta_1 - l\dot{\theta}_2\sin\theta_2 + \dot{r}_y)^2), \quad (1)$$

$$U = -mgl(2\cos\theta_1 + \cos\theta_2). \quad (2)$$

Здесь $\dot{r}_x$ и $\dot{r}_y$ скорости точки подвеса вдоль осей x и y соответственно, m – масса каждого грузика, l – длина стержней. С помощью метода усреднения [1, 2] из выражений (1) и (2) выводится выражение для эффективной потенциальной энергии маятника:

$$U(\theta_1, \theta_2) = mgl \times \\ \times\left(\lambda\frac{\cos(2\theta_1 - 2\theta) + 1}{-3 + \cos(2\theta_1 - 2\theta_2)} - 2\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right). \quad (3)$$

Здесь $l = (Wa)^2/gl$, a – амплитуда вибраций, W – угловая частота колебаний точки подвеса, θ – угол между вертикалью и направлением вибрации.

Выражение (3) использовалось для численного нахождения положений равновесия и анализа устойчивости. Для получения аналитических результатов более удобным оказался подход, использующий результаты для однозвенного маятника.

1. С учетом того факта, что грузик в пределе больших частот колеблется вдоль стержня [3], были найдены скорости вибраций грузиков A и B по известной скорости точки подвеса O (см. рис. 1).

2. С использованием полученных скоростей вибраций и выражений для потенциальной энергии однозвенного маятника [4] было найдено точное выражение для вектора **c**:

$$\mathbf{c} = \sqrt{2}\left(\frac{\alpha_1}{3}\mathbf{R}_1 - \mathbf{g}\right)\sqrt{\frac{(\mathbf{g}, \tau_2)l^2}{(\mathbf{R}_1, \tau_2)(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}}, \quad (4)$$

$$\alpha_1 = \left(2 - \frac{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}{l^4}\right)\left(\frac{(\mathbf{g}, \mathbf{R}_1)}{l^2} - \\ - \frac{(\mathbf{g}, \tau_2)l^2}{(\mathbf{R}_1, \tau_2)(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)}\right) - \frac{(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)(\mathbf{g}, \mathbf{R}_2)}{l^4}, \quad (5)$$

откуда можно найти l и θ. Из условия положительности подкоренного выражения в формуле (4) следует, что точки экстремума могут существовать только в области $\sin\theta_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) > 0$ (на рис. 2 они обозначены желтым цветом).

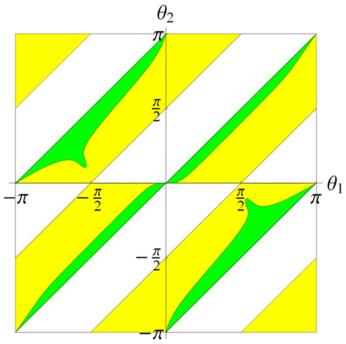

Рис. 2

Устойчивость

С использованием выражения для эффективной потенциальной энергии (3) и с учетом формулы для положения равновесия (4) были численно получены области устойчивости двойного математического маятник по углам $\theta_{1,2}$ (на рис. 2 обозначены зеленым цветом). В пределах этих областей маятник можно стабилизировать периодическими вибрациями вдоль выделенного направления.

Полученные результаты позволяют составить программу, которая по заданному положению равновесия определяет необходимые управляющие параметры вибрации и вычисляет на основе точных уравнений переход маятника из нижнего положения в заданное положение из области устойчивых состояний.

Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.

2. Петров А.Г. // Докл. РАН. 2010. Т. 431, №6. С. 762–765.

3. Петров А.Г. // МТТ. 2001. №3. С. 19–32.

4. Буланчук П.О., Петров А.Г. // Докл. РАН. 2010. Т. 430, №5. С. 627–630.

CONTROLLING THE MOTION OF A DOUBLE PENDULUM BY VIBRATING THE SUSPENSION POINT

P.O. Bulanchuk

The motion of a double pendulum in a gravity field with arbitrary three-dimensional periodic vibration of the suspension point is considered. The work is aimed at finding the controlling parameters of vibration of the suspension point necessary for the stabilization of a pendulum at an arbitrarily set point. For the case of vibrations along one direction the solution was found analytically. The region of stable equilibrium position is determined numerically.

Keywords: multi-link pendulum, suspension point vibrations, pendulum stabilization, Kapitsa pendulum, Stephenson pendulum, inverted pendulum.