УДК 539.3

УПРУГИЙ ОТКЛИК СРЕДЫ ПРИ РАЗВИТИИ, ОСТАНОВКЕ И ПОВТОРНОМ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ, ВКЛЮЧАЯ МГНОВЕННУЮ РАЗГРУЗКУ

А.А. Буренин

Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

burenin@iacp.dvo.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

На примере простейшей из возможных краевых задач теории больших деформаций упруговязкопластической среды о деформировании тяжелого слоя, расположенного на наклонной плоскости, обсуждаются постановочные аспекты ряда последовательных задач о развитии течения, его торможении до остановки и повторного нагружения в противоположную сторону. В последнем случае возможно уменьшение уровня накопленных необратимых деформаций. Рассмотрен также случай мгновенного снятия нагружающих усилий и особенности взаимодействия возникающей волны разгрузки с упругопластической границей.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкость, большие деформации.

В качестве математической модели деформирования будем использовать предложенную ранее [1] модель, дополненную учетом вязких свойств среды при ее необратимом деформировании [2]. Основными предпосылками при записи соотношений данной модели были требования, чтобы компоненты необратимых деформаций в процессах разгрузки изменялись так же, как если бы тело совершало жесткие движения, и чтобы напряжения в среде определялись только уровнем и распределением обратимых деформаций. Это достигалось соответствующим заданием потоковых слагаемых в уравнениях изменения (переноса) для тензоров обратимых и необратимых деформаций и принятием положения о независимости термодинамических потенциалов (внутренняя энергия, свободная энергия) от необратимых деформаций. Последнее ограничение можно было бы снять, так как принимается оно только для того, чтобы все соотношения модели были бы достаточно обозримыми. Первое из требований является принципиальным и приводит к необходимости использования вполне конкретного определения для объективной производной тензоров обратимых и необратимых деформаций и вполне конкретному разделению полных деформаций Альманси на обратимую и необратимую составляющие. Таким образом, кинематика среды в пространственных переменных Эйлера задается соотношениями

$$d_{ij}=e_{ij}+p_{ij}-\frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}-e_{ik}p_{kj}-p_{ik}e_{kj}+$$
$$+e_{ik}p_{ks}e_{sj},\quad \frac{De_{ij}}{Dt}=\varepsilon_{ij}-\varepsilon^{p}_{ij}-$$
$$-\frac{1}{2}((\varepsilon_{ik}-\varepsilon^{p}_{ik}+z_{ik})e_{kj}+e_{ik}(\varepsilon_{kj}-\varepsilon^{p}_{kj}-z_{kj})),$$
$$\frac{Dp_{ij}}{Dt}=\varepsilon^{p}_{ij}-p_{ik}\varepsilon^{p}_{kj}-\varepsilon^{p}_{ik}p_{kj},$$
$$\frac{Dn_{ij}}{Dt}=\frac{dn_{ij}}{dt}-r_{ik}n_{kj}+n_{ik}r_{kj},\quad \varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}+v_{j,i}),$$
$$r_{ij}=\frac{1}{2}(v_{i,j}-v_{j,i})+z_{ij}(\varepsilon_{sk},e_{sk}),$$
$$v_i=\frac{du_i}{dt}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_{i,j}v_j,\quad u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \qquad (1)$$

Здесь d_{ij} – компоненты тензора деформаций Альманси; e_{ij} – $1/2e_{ik}e_{kj}$, p_{ij} – их обратимые и необратимые составляющие; D/Dt – объективная производная тензоров по времени, которая записана для произвольного тензора n_{ij}; u_i и v_i – компоненты вектора перемещений и вектора скоростей точек среды; ε^{p}_{ij} – компоненты тензора скоростей пластических деформаций. Наличие нелинейной части z_{ij} в тензоре вращений r_{ij} (в [1] зависимость $z_{ij}(e_{sk}, e_{sk})$ выписана полностью) как раз связано с требованием о неизменности тензора необратимых деформаций в процессах разгрузки $(\varepsilon^{p}_{ij}=0)$.

В условиях независимости напряжений от необратимых деформаций из первого начала термодинамики следуют зависимости, вполне аналогичные формуле Мурнагана. Здесь запишем их, предполагая несжимаемость среды, как при обратимом, так и при необратимом деформировании:

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\frac{\partial W}{\partial d_{ik}}(\delta_{kj}-2d_{kj})\ \text{ при }\ p_{ij}\equiv 0,$$
$$\sigma_{ij}=-p_1\delta_{ij}+\frac{\partial W}{\partial e_{ik}}(\delta_{kj}-e_{kj})\ \text{ при }\ p_{ij}\neq 0. \qquad (2)$$

В (2) p и p_1 – добавочные гидростатические давления. Считая среду изотропной, упругий потенциал W примем в виде

$$W = -2\mu J_1 - \mu J_2 + bJ_1^2 + (b-\mu)J_1J_2 - \chi J_1^3 + ...,$$

$$J_k = \begin{cases} L_k & \text{при} \quad p_{ij} \equiv 0, \\ I_k & \text{при} \quad p_{ij} \neq 0, \end{cases}$$

$$L_1 = d_{kk}, \quad L_2 = d_{ik}d_{ki}, \quad I_1 = e_{kk} - \frac{1}{2}e_{sk}e_{ks},$$

$$I_2 = e_{st}e_{ts} - e_{sk}e_{kt}e_{ts} + \frac{1}{4}e_{sk}e_{kt}e_{tn}e_{ns}. \qquad (3)$$

Здесь μ, b, χ – упругие модули среды.

Считаем, что необратимые деформации в материале накапливаются при достижении напряженным состоянием поверхности нагружения, которая в условиях принимаемого принципа максимума Мизеса является пластическим потенциалом. В качестве такой поверхности будем использовать условие пластичности Треска, обобщенное на случай учета вязких свойств материалов, в форме

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max|\varepsilon_k^p|, \qquad (4)$$

где k – предел текучести, η – коэффициент вязкости, σ_i – компоненты главных напряжений, ε_k^p – компоненты главных скоростей пластических деформаций.

Скорости необратимых деформаций связаны с напряжениями ассоциированным законом пластического течения

$$\varepsilon_{ij}^p = \lambda\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = k, \quad \lambda > 0.$$

В рамках данной модели рассмотрен тяжелый слой упруговязкопластического материала, расположенный на наклонной плоскости и нагружаемый на своей свободной поверхности. Задача оказывается одномерной с краевыми условиями

$$u\big|_{x_1=h} = 0, \quad \sigma_{11}\big|_{x_1=0} = -\sigma, \quad \sigma_{12}\big|_{x_1=0} = \xi, \quad (5)$$

где $u = u_2(x_1)$ – единственная отличная от нуля компонента вектора перемещений, σ и ξ – задаваемые монотонные функции времени. Начиная с некоторого значения ξ, в слое возникает вязкопластическое течение. В то время как функция σ в (5) может быть произвольной, в частности, σ может равняться нулю, значения функции ξ ограничены условиями выхода напряженных состояний (5) на поверхность нагружения (4), т.е. следует иметь в виду, что $\xi_* \le \xi \le \xi^*$. При этом $\xi_* < 0$, а $\xi^* > 0$. Данные критические значения для ξ следуют из условия (4). Если $\xi_* \le \xi < 0$ (сдвиг вниз по наклонной плоскости), то условие пластичности выполнится на плоскости $x_1 = h$; в случае, когда $0 < \xi \le \xi^*$ (сдвиг вверх по наклонной плоскости), условие пластичности выполнится на плоскости $x_1 = 0$. В квазистатической постановке можно получить точное решение данной задачи с продвижением упругопластической границы либо от плоскости $x_1 = 0$, либо от плоскости $x_1 = h$. При снятии нагружающих усилий возможно рассчитать возникающие остаточные напряжения. В случае мгновенного снятия нагружающих усилий возникает переходный процесс разгрузки с распространяющейся волной разгрузки. При этом для такого процесса можно получить неоднородное волновое уравнение в перемещениях и рассмотреть взаимодействие данной волны с упругопластической границей и с граничными плоскостями слоя.

Список литературы

1. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях // Докл. РАН. 1996. Т. 347, №2. С. 199–201.

2. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. №4. С. 87–93.

ELASTIC RESPONSE OF MEDIA IN THE PROCESS OF PROPAGATION, STOPPAGE AND REOCCURRING OF A VISCOPLASTIC FLOW, INCLUDING INSTANTANEOUS UNLOADING

A.A. Burenin

The aspects of setting up a number of consequent problems about propagation of flow, its deceleration up to halting and subsequent inverse loading are discussed using the example of the simplest of all the possible boundary problems of large strains of elastoviscoplastic environment theory about the deformation of a heavy layer situated on an inclined plane. In the case of inverse loading, the level of accumulated irreversible strains may decrease. The case of instantaneous removal of the loading pressure and some particulars of the interaction of the occurring wave with the elastoplastic boundary are also considered.

Keywords: elasticity, plasticity, viscosity, large deformations.