УДК 534.870

КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А.Б. Бячков

Пермский госуниверситет

AndreyBya@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

Представлена классификация форм дифференциально-алгебраических моделей динамики систем связанных твердых тел. В основе классификации – компактные матричные формы записи уравнений кинематики и динамики систем тел, полученные с использованием понятия матрицы кинематической структуры и геометрического подхода при описании относительного движения систем тел. Единая форма записи моделей удобна для представления и сравнения различных подходов к моделированию динамики систем твердых тел.

Ключевые слова: система твердых тел, дифференциально-алгебраические уравнения.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему абсолютно твердых тел, соединенных шарнирами. Пусть N – число тел в системе. Структура системы задана ориентированным графом с матрицей инциденции $I = (I_{ik})$, $i = \overline{0, N}$, $k = \overline{1, m}$, где N – число тел в системе, m – число шарниров. С каждым телом свяжем ортогональную декартову систему координат. Положение каждого тела в пространстве относительно «предшествующего» для него тела в шарнире k полностью определяется матрицей C_k – (6×6)-матрицей преобразования скоростей из предыдущей системы координат в систему координат последующего тела.

Будем предполагать, что внутренние (реализуемые в шарнирах) и внешние связи, наложенные на систему, голономные и идеальные. Предположим, что проблема параметризации конфигурационного многообразия относительных движений в каждом шарнире решена. Пусть $\mathbf{q}_k$ – вектор относительных обобщенных координат, $\mathbf{q}$ – вектор всех n обобщенных координат относительных движений в системе тел, B_k – матрица базиса локального касательного дополнения многообразия относительных движений k-го сочленения, $B = \mathrm{diag}\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$. Относительные скорости и ускорения тел системы можно выразить через вектор обобщенных относительных координат системы тел в виде: $\mathbf{v}^r = B\dot{\mathbf{q}} + b$, $\mathbf{w}^r = B\ddot{\mathbf{q}} + w_t$. Каждой матрице B_k соответствует Z_k – матрица базиса локального ортогонального дополнения многообразия относительных движений, $Z = \mathrm{diag}\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_m\}$. Условие ортогональности касательного и ортогонального базисов выражаются соотношением $Z^T B = 0$.

Ставится задача построения спектра моделей динамики системы твердых тел относительно полного набора переменных состояния (координаты, скорости, реакции связей) для их последующего анализа с точки зрения вычислительной эффективности и удобства применения в различных приложениях.

2. Матрица кинематической структуры и расширенная система уравнений движения

Введем матрицу S размером ($6N$×$6m$) следующим образом: матрица состоит из блоков размером (6×6), блоки заполняются по формулам $S_{ii} = -I_{ii} \cdot E_6$, $S_{ik} = -I_{ki} \cdot C_k$ $(i \neq k)$, где E_6 – единичная матрица указанного размера. Поскольку матрица S содержит информацию как о топологической структуре системы, так и об относительном положении тел в системе, будем называть такую матрицу матрицей кинематической структуры.

Отметим следующие свойства матрицы S:

а) для системы со структурой дерева матрица S квадратная. Существует матрица T такая, что $TS = ST = E$ (обратная для S). Для любой кинематической структуры типа «дерево» матрица T известна. При этом матрицы S и T являются блочно-нижнетреугольными;

б) с использованием матрицы S уравнения кинематики системы тел также можно записать в матричном виде: $S\mathbf{V} = \mathbf{v}^r$, $S\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{w}^r + \mathbf{w}^c$, где $\mathbf{v}^r$ и $\mathbf{w}^r$ – относительные скорости и ускорения тел системы, $\mathbf{V}$ – абсолютные скорости тел системы. Таким образом, матрица S^T позволяет проектировать векторы из пространства абсолютных скоростей системы в пространство векторов относительных скоростей. Если матрица T существует, она является проектором из пространства относительных скоростей в пространство абсолютных скоростей;

в) с помощью матрицы S можно составить расширенную систему уравнений динамики системы твердых тел

$$\begin{cases} M\dot{\mathbf{V}} - S^T\mathbf{R} = \mathbf{F}^*, \\ -S\dot{\mathbf{V}} + B\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{w}^*, \\ B^T\mathbf{R} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Первое матричное уравнение системы – уравнение динамики в форме Ньютона – Эйлера, второе – уравнение кинематики с учетом параметризации многообразий относительных движений, третье – принцип идеальности связей. Система (1) является системой дифференциально-алгебраических уравнений, что определяет методы ее дальнейшего исследования.

3. Методы редукции расширенной системы

Если матрица S – квадратная (система со структурой дерева), система (1) замкнута относительно неизвестных величин $\dot{\mathbf{V}}, \ddot{\mathbf{q}}, \mathbf{R}$. Матрица системы – симметричная, блочная трехдиагональная, достаточно разреженная.

Расширенная система (1) может быть использована непосредственно в качестве модели динамики системы твердых тел. С другой стороны, она служит основой для получения других (в том числе известных) форм записи уравнений динамики систем тел со структурой дерева. Все методы связаны с уменьшением размерности (редукции) расширенной системы.

К основным методам редукции относятся:

а) группа методов редукции расширенной системы (1), основанных на исключении из системы реакций связей с использованием касательного пространства. В результате такой редукции получим уравнения динамики относительно обобщенных координат (уравнения Лагранжа второго рода). Такие подходы (в зависимости от реализации) получили название прямого метода, метода составных тел;

б) вторая группа основана на идее использования ортогонального дополнения многообразия относительных движений и выражения сил реакций через множители Лагранжа $\mathbf{R} = Z\lambda$. В результате уравнение динамики сводится к уравнению Лагранжа первого рода;

в) третье направление связано с одновременным использованием и касательного, и ортогонального пространств. В результате получаем уравнения типа Маджи в избыточных квазискоростях для системы твердых тел.

Аналогично можно получить из расширенной системы (1) другие известные формы уравнений динамики систем твердых тел: уравнения Маджи в квазискоростях и обобщенных координатах, уравнения Лагранжа первого рода в обобщенных координатах, уравнения кинетостатики, уравнения в импульсах Пуассона и др. Приведен сравнительный анализ вычислительной эффективности различных методов.

В случае, если система имеет замкнутые циклы (матрица S – прямоугольная), основные методы приведения матрицы S к квадратному виду связывают с понятием остовного дерева графа (метод разрезания шарниров) и вторичного графа (метод раздвоения тел). В этих случаях матрица кинематической структуры квадратная, но появляются дополнительные связи. При этом методика составления расширенной системы и ее структура (следовательно, и методы редукции) сохраняются. Основная проблема при реализации такого подхода – построение базисов касательного и ортогонального пространств многообразия относительных движений для дополнительных связей.

Работа выполнена совместно с В.Н. Ивановым (Пермский государственный университет).

Работа поддержана РФФИ (грант № 09-01-99006-р_офи).

Список литературы

1. Бячков А.Б., Иванов В.Н., Шимановский В.А. // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2009. Вып. 7(33). С. 21–25.

A CLASSIFICATION OF THE FORMS OF DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC MODELS OF MULTIBODY DYNAMICS

A.B. Byachkov

In this report a classification of the forms of differential-algebraic models of multibody dynamics is presented. The classification is based on compact matrix forms of the of kinematic and dynamic equations of multibody systems which are obtained using the concept of a matrix of kinematic structure and the geometrical approach for describing relative movement of bodies. The uniform notation of the models is convenient for the representation and comparison of various approaches to modelling multibody dynamics.

Keywords: multibody system, differential-algebraic equations.