

УДК 533.6.013.42

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ АЭРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

© 2011 г.

П.А. Вельмисов, А.В. Анкилов

Ульяновский государственный технический университет

velmisov@ulstu.ru

Поступила в редакцию 24.08.2011

На основе построенных математических моделей исследуется динамика и устойчивость деформируемых элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред при их взаимодействии с дозвуковым или сверхзвуковым потоком идеальной среды (газа или жидкости). Разработаны аналитические методики исследования устойчивости в задачах аэрогидроупругости, основанные на построении функционалов. Исследование динамики элементов проводится с помощью разработанных численно-аналитических методов.

*Ключевые слова:* аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамика, устойчивость, деформируемый элемент, дозвуковой поток, сверхзвуковой поток, система интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, функционал.

Исследуется динамика и устойчивость деформируемых (вязкоупругих, упругих) элементов (пластин, стержней) тонкостенных конструкций с учетом взаимодействия с потоком идеальной жидкости (газа). Определение устойчивости деформируемого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Механическое поведение вязкоупругого материала описывается моделью, согласно которой связь между напряжением и деформацией определяется линейным или нелинейным уравнением типа Вольтерра – Фойхта. Поведение упругого материала описывается нелинейной моделью, учитывающей продольную и поперечную составляющую деформации элементов. Рассматриваются, в частности, задачи с учетом теплового воздействия на элементы и эффектов запаздывания различных внешних воздействий.

Исследуется устойчивость движения элементов летательных аппаратов, трубопроводных систем, датчиков измерения параметров газожидкостных сред. Подобные задачи рассматривались в работах [1–5].

Разработаны аналитические методики исследования устойчивости в задачах аэрогидроупругости, основанные на построении функционалов. Исследование динамики элементов проводится с помощью разработанных численно-аналитических методов.

Изучается устойчивость элементов при различных способах их закрепления и местах рас-

положения на конструкциях. Скорости движения газа предполагаются дозвуковыми или сверхзвуковыми.

Для примера приведем в линейной постановке плоскую задачу аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при дозвуковом бесциркуляционном обтекании пластины потоком газа.

Пусть на плоскости  $xOy$ , в которой происходят совместные колебания упругой пластины и газа, пластине соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[0, l]$ . В бесконечно удаленной точке скорость газа равна  $V$  и имеет направление, совпадающее с направлением оси  $Ox$ . Введем обозначения:  $w(x, t)$  – прогиб пластины,  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости возмущенного потока газа. Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in G = R^2 \setminus [0, l],$$

$$\varphi_y^\pm(x, 0, t) = \lim_{y \rightarrow \pm 0} \varphi_y(x, y, t) =$$

$$= w_t(x, t) + Vw_x(x, t), \quad x \in [0, l],$$

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 \equiv (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0,$$

$$Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_0 w(x, t) +$$

$$+ \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = \rho(\varphi_t^+ - \varphi_t^-) +$$

$$+ \rho V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-), \quad x \in (0, l).$$

Здесь индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по соответствующей переменной; штрих обозначает производную по  $x$ , а точка –

производную по  $t$ ;  $N$  – сжимающее (растягивающее) пластину усилие;  $\rho$ ,  $D$ ,  $M$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_0$  – другие постоянные параметры системы.

Используя методы теории функций комплексного переменного [6], решение задачи можно свести к исследованию интегро-дифференциального уравнения в частных производных для неизвестной функции деформации пластины

$$Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_0 w(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + V\dot{w}'(\tau, t)) K(\tau, x) d\tau - \frac{V\rho}{\pi} \int_0^l (\dot{w}(\tau, t) + Vw'(\tau, t)) \frac{\partial K(\tau, x)}{\partial x} d\tau, \quad x \in (0, l),$$

$$K(\tau, x) = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x(l-\tau)} + \sqrt{\tau(l-x)}}{\sqrt{x(l-\tau)} - \sqrt{\tau(l-x)}} \right|, \quad \tau \neq x,$$

для которого: 1) построен функционал типа Ляпунова и на основе его исследования получены условия динамической устойчивости; 2) по методу Галеркина

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) g_i(x)$$

проведено исследование динамики и получена численно область устойчивости приближенных решений для конкретных значений параметров механической системы; 3) проведено сравнение численных и аналитических расчетов (например, рис. 1, где показаны области устойчивости на плоскости  $(N, V)$ ).

На рис. 1 обозначено: кривая I – граница области устойчивости, полученная аналитически с помощью функционала; II, III, IV – границы областей устойчивости, полученные численно для решения в шестом ( $n=6$ ), четвертом ( $n=4$ ) и втором ( $n=2$ ) приближениях соответственно в случае жестко закрепленных концов пластины при

значениях параметров  $D = 806.7$ ;  $M = 42.4$ ;  $l = 2$ ;  $\beta_0 = 4$ ;  $\beta_1 = 0.1$ ;  $\beta_2 = 0.2$ .

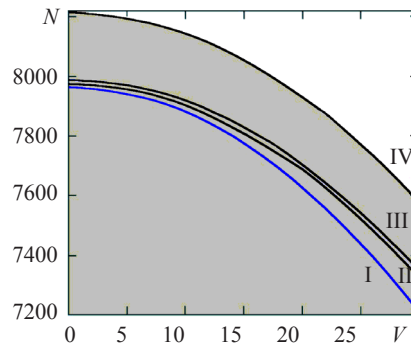


Рис. 1

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России (2009-2013 гг.)», ГК №1122.

Список литературы

1. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов. Ульяновск: УлГТУ, 2000. 115 с.
2. Ankilov A.V., Velmisov P.A. Stability of the solutions of one class of aerohydroelasticity problems // J. Applications of Mathematics in Engineering and Economics. American Institute of Physics, USA. 2008. P. 414–426.
3. Анкилов А.В. и др. Математическое моделирование механической системы «трубопровод–датчик давления». Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
4. Анкилов А.В., Вельмисов П.А. Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии. Ульяновск: УлГТУ, 2009. 220 с.
5. Вельмисов П.А., Решетников Ю.А., Семенова Е.П. Уравнения колебаний упругих элементов системы двух крыловых профилей // Механика и процессы управления: Сб. науч. трудов. Ульяновск: УлГТУ, 2010. С. 17–27.
6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.

MATHEMATICAL MODELLING OF DYNAMICS AND STABILITY OF DEFORMABLE STRUCTURAL ELEMENTS UNDER AEROHYDRODYNAMIC EFFECTS

P.A. Velmisov, A.V. Ankilov

Based on the constructed mathematical models, the dynamics and stability of deformable elements of flying vehicles, pipeline systems, sensors for measuring the parameters of gas–liquid media interacting with subsonic or supersonic flow of the ideal medium (ideal gas or perfect liquid) are investigated. Analytical methods of investigating the stability in problems of aerohydroelasticity based on constructing the functionals are developed. The dynamics of the elements is investigated using numerical-analytical methods.

Keywords: aeroelasticity, mathematical modelling, dynamics, stability, deformable element, subsonic flow, supersonic flow, system of partial integro-differential equations, functional.