УДК 539.3

# КРОМОЧНЫЕ ВОЛНЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА В ТОЛСТОЙ ПЛАСТИНЕ



*М.В. Вильде*

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

mv_wilde@mail.ru

*Поступила в редакцию 24.08.2011*

Исследуются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль торца пластины (кромочные волны). Рассматриваются симметричные относительно срединной плоскости колебания пластины, лицевые поверхности которой либо свободны от напряжений, либо жестко закреплены, на боковых сторонах пластины ставятся перекрестные граничные условия. Для описания колебаний пластины применяется трехмерная теория упругости, что позволяет изучать кромочные волны высшего порядка. Колебания пластины возбуждаются нормальной нагрузкой, приложенной на торце. Представлены численные результаты для резонансов первых четырех кромочных волн высшего порядка в широком частотном диапазоне. Получены асимптотики фазовых скоростей кромочных волн для больших значений волнового числа. Показано, что в случае свободных лицевых поверхностей коэффициент затухания всех кромочных волн высшего порядка стремится к нулю с уменьшением длины волны, а фазовые скорости в коротковолновом пределе выходят на скорость волны Рэлея. В пластине с жестко закрепленными лицевыми поверхностями фундаментальные кромочные волны отсутствуют, но существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. В коротковолновом пределе их фазовые скорости выходят на скорость волны Рэлея. При каждом фиксированном конечном значении волнового числа существует конечное число незатухающих волн и бесконечное число затухающих.

*Ключевые слова:* колебания пластины, поверхностные волны, резонансные частоты, асимптотический анализ.

Проводится исследование волн, распространяющихся вдоль кромки пластины (кромочные волны). Приближенные двумерные теории пластин описывают две из таких волн: изгибную волну «рэлеевского» типа [1] и планарную волну «рэлеевского» типа, которая является аналогом волны Рэлея в теории обобщенного плоского напряженного состояния тонких пластин. С точки зрения трехмерной теории упругости названные волны представляют собой длинноволновые приближения антисимметричной и симметричной фундаментальных кромочных волн соответственно. Кроме того, существуют кромочные волны высшего порядка, для которых собственные частоты колебаний полуполосы (частоты краевого резонанса), найденные в работе [2], играют роль частот запирания. В отличие от волн «рэлеевского» типа в двумерных теориях пластин, кромочные волны высшего порядка, которые могут быть описаны только на основе трехмерных уравнений теории упругости, практически не изучены. Представлены результаты асимптотического и численного исследования кромочных волн в широком частотном диапазоне.

Рассмотрим гармонические колебания толстой упругой пластины, занимающей в декартовых координатах $(x, y, z)$ область $0 \le x < \infty$, $|y| \le h$, $|z| \le b$, возбуждаемые нормальной нагрузкой, приложенной к торцу $x = 0$. Постановка задачи и метод ее численного решения приведены в статье [3]. В отличие от [3], где рассматривался только первый («нулевой») резонанс, соответствующий фундаментальной кромочной волне, в данном исследовании рассмотрены резонансы высших номеров. Ограничимся изучением колебаний пластины, симметричных по переменной $y$. Для поиска интересующих нас резонансов приложим на торце $x = 0$ нагрузку вида

$$\sigma_x = \cos(\alpha_T y)\cos(sz), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad (1)$$

где $\alpha_T$ – величина, которую следует подобрать таким образом, чтобы резонанс возбуждался наиболее эффективно. Остальные обозначения даны в работе [3].

В статье [2] показано, что возникновение краевых резонансов в полуполосе, находящейся в условиях плоской деформации, связано с поверхностной волной Рэлея. По отношению к рассматриваемой задаче, задача из [2] соответствует случаю $s = 0$. Следовательно, при определении резонансов кромочных волн высшего порядка следует начать с резонансных частот, найденных в [2], и проследить за их изменением с ростом $s$.

Анализируя форму трехмерной поверхностной волны Рэлея при $s \to \infty$, приходим к асимптотике

$$\omega_n^{(\infty)} = c_R \sqrt{s^2 + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \qquad (2)$$

как в случае свободных, так и в случае жестко закрепленных боковых сторон.

В [4] показано, что кромочные волны высшего порядка, как правило, демпфируются распространяющимися модами. Исключение составляет случай фундаментальных кромочных волн [3, 4], а также случай первой волны высшего порядка при $\nu = 0$ в интервале $0 \le s \le 1.1585/\pi$ [4]. Кроме того, в [4] построены дисперсионные кривые $\mathrm{Re}\,\omega_1(s)$ (первая кромочная волна) для $\nu = 0, 0.1, 0.2$ и $0 \le s \le 0.5$, а также графики величины $\mathrm{Im}\,\omega_1(s)$. Эти графики показывают, что $\mathrm{Im}\,\omega_1(s)$ при увеличении $s$ резко возрастает. С другой стороны, было показано, что при $s \to \infty$ форма кромочной волны стремится к форме трехмерной волны Рэлея. Последняя может быть сформирована только нераспространяющимися модами. Следовательно, при $s \to \infty$ вклад распространяющихся мод в решение должен убывать, что означает уменьшение мнимой части собственной частоты. Численные результаты, выполненные по методике, описанной в [3], показывают, что при достаточно больших $s$ возрастание величины $\mathrm{Im}\,\omega_1(s)$ (ширины резонанса), отмеченное в работе [4], сменяется ее убыванием.

В случае жестко закрепленных боковых сторон низшей частотой запирания при $s \to \infty$ является частота запирания нулевой антиплоской моды:

$$\Omega_0^{sh} = \sqrt{s^2 + \frac{1}{4}}. \qquad (3)$$

Используя асимптотику (2), находим, что $\omega_n^{(\infty)} <$ $< \Omega_0^{sh}$ при

$$s > s_{cr}^{(\infty)} = \sqrt{\frac{c_R^2(2n+1)^2 - 1}{4(1 - c_R^2)}}, \qquad (4)$$

где $n$ – номер резонанса (номер волны высшего порядка). Таким образом, для каждой волны с фиксированным номером $n > 0$ найдется такое значение волнового числа $s_{cr}$, после которого частота колебаний в данной волне окажется ниже первой частоты запирания. В таком случае демпфирования волны распространяющимися модами не происходит, следовательно, собственная частота соответствующей однородной задачи станет действительной. Формула (4) дает асимптотическую оценку для величины $s_{cr}$. Частоты «нулевой» волны (их асимптотическая оценка дается формулой (2) при $n = 0$) всегда являются действительными.

В заключение сформулируем основные выводы:

1. В пластине со свободными лицевыми поверхностями существует бесконечное счетное множество кромочных волн, из которых только одна – фундаментальная волна – в длинноволновом диапазоне может быть описана двумерными теориями пластин. В коротковолновом пределе фазовая скорость фундаментальной волны стремится к скорости угловой волны $c^E$, фазовые скорости всех остальных волн – к скорости волны Рэлея $c_R$. За исключением фундаментальной волны и первой волны высшего порядка в диапазоне $0 \le s \le 1.1585/\pi$, все кромочные волны являются затухающими, но с ростом волнового числа $s$ затухание каждой волны с фиксированным номером становится малым.

2. В пластине с жестко закрепленными лицевыми поверхностями фундаментальные кромочные волны отсутствуют, но существует бесконечное счетное множество кромочных волн высшего порядка. В коротковолновом пределе их фазовые скорости выходят на скорость волны Рэлея. При каждом фиксированном конечном значении волнового числа существует конечное число незатухающих волн и бесконечное число затухающих.

***Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №06-08-00836.***

*Список литературы*

1. Коненков Ю.К. Об изгибной волне «рэлеевского» типа // Акуст. журн. 1960. Т. 6. Вып. 1. С. 124–126.

2. Вильде М.В. Резонансы волны Рэлея в полуполосе // Проблемы прочности и пластичности. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2004. Вып. 66. С. 29–38.

3. Вильде М.В. Исследование явления краевого резонанса в пластинах на основе трехмерных уравнений теории упругости // Механика деформируемых сред. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. Вып. 16. С. 7–14.

4. Zernov V., Kaplunov J. Three-dimensional edge waves in plates // Proc. R. Soc. A. 2008. V. 464. P. 301–318.

**HIGHER ORDER EDGE WAVES IN THICK PLATES**

***M.V. Wilde***

Surface waves propagating along the edge of a plate (edge waves) are investigated. The case of symmetrical vibrations of a plate with free or fixed faces is considered. The sides of the plate are subjected to mixed boundary conditions. The motion of the plate is assumed to be described by 3D theory of elasticity, which allows to study higher order edge waves. The vibrations are exited by normal edge load. The numerical results for first four higher order edge waves are presented. The asymptotical estimates are obtained for phase velocities as the wave number tends to infinity. In the short-wave limit the phase velocities of higher order edge waves tend to the velocity of Rayleigh wave. In the case of free faces all higher order edge waves are damped by radiation of energy with propagating waves, but for short waves the damping becomes small. In the case of fixed faces there is no fundamental edge wave, but an infinite spectrum of higher order edge waves. For each fixed wave length there exist several non-damped waves, but the other waves of the spectrum are damped.

*Keywords:* vibrations of plates, surface waves, resonance frequencies, asymptotical analysis.